

Modèle

On considère l'écoulement d'un mélange de deux fluides compressibles (un gaz et un liquide par exemple) dans un tuyau de section variable. Le modèle est le suivant :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = S(W) \quad (1)$$

où le vecteur de variables conservatives est :

$$W = (A\rho, A\rho u, A\rho E, A\rho\varphi, A)^T, \quad (2)$$

le flux conservatif est :

$$F(W) = (A\rho u, A(\rho u^2 + p), A(\rho E + p)u, A\rho\varphi u, 0)^T, \quad (3)$$

et le terme source non-conservatif est :

$$S = (0, p\partial_x A, 0, 0, 0). \quad (4)$$

Sans perte de généralité, on considère la loi de pression des gaz raides :

$$p(\rho, e, \varphi) = (\gamma(\varphi) - 1)\rho e - \gamma(\varphi)\pi(\varphi). \quad (5)$$

Schéma numérique

• Schéma de volumes finis

Le système (??) est approché par un **schéma de volumes finis** sur les cellules $]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$, $i \in \mathbb{Z}$. On note τ le pas de temps et $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ la taille de la cellule i . On note W_i^n le vecteur de variables conservatives sur la cellule i au temps t_n . La section A est approchée par une fonction en escalier, $A = A_i$ sur la cellule i .

On considère une approche **Arbitrary Lagrangian Eulerian** (ALE). La frontière $x_{i+1/2}^n$ peut se déplacer à la vitesse $v_{i+1/2}^n$ entre t_n et t_{n+1} :

$$x_{i+1/2}^{n+1,-} = x_{i+1/2}^n + \tau v_{i+1/2}^n. \quad (6)$$

On définit un flux ALE :

$$F(W_L, W_R, v^\pm) := F(W(W_L, W_R, v^\pm)) - vW(W_L, W_R, v^\pm) \quad (7)$$

où $W(W_L, W_R, v^\pm)$ est obtenu à l'aide d'un solveur de Riemann approché décrit plus loin.

Si $v_{i+1/2}^n \leq 0$ et $v_{i-1/2}^n \geq 0$, le schéma ALE est :

$$\Delta x_i^{n+1} W_i^{n+1,-} - \Delta x_i^n W_i^n + \tau \left(F(W_i^n, W_{i+1}^n, v_{i+1/2}^{n,-}) - F(W_{i-1}^n, W_i^n, v_{i-1/2}^{n,+}) \right) = 0. \quad (8)$$

Pour tenir compte de la section variable, si $v_{i+1/2}^n > 0$ on doit ajouter le terme suivant à gauche de l'équation précédente

$$\tau \left(F(W_i^n, W_{i+1}^n, 0^-) - F(W_i^n, W_{i+1}^n, 0^+) \right), \quad (9)$$

et si $v_{i-1/2}^n < 0$ on ajoute :

$$\tau \left(F(W_{i-1}^n, W_i^n, 0^-) - F(W_{i-1}^n, W_i^n, 0^+) \right). \quad (10)$$

• Calcul de la vitesse d'interface $v_{i+1/2}^n$

Quand les données initiales satisfont $\varphi \in \{0, 1\}$, l'algorithme vérifie

– Si on n'est pas à l'interface, c.à.d. si $\varphi_L = \varphi_R$, on prend $v = 0$.

– Si on est à l'interface, c.à.d. si $\varphi_L \neq \varphi_R$, on utilise un solveur de Riemann exact pour calculer $u^*(W_L, W_R)$ et $p^*(W_L, W_R)$ qui ne présentent pas de saut à la discontinuité de contact. On prend $v = u^*(W_L, W_R)$, $A^* = A_L$ if $v < 0$ et $A^* = A_R$ si $v > 0$. Le flux ALE devient lagrangien et prend la forme :

$$F(W_L, W_R, v^\pm) = (0, A^* p^*, A^* u^* p^*, 0, -A^* u^*)^T. \quad (11)$$

• Solveur well-balanced pour $W(W_L, W_R, 0^\pm)$

Comme les invariants de Riemann associés à l'onde stationnaire sont φ , $s = (p + \pi(\varphi))\rho^{-\gamma(\varphi)}$, $Q = \rho Au$ et $H = E + \frac{p}{\rho}$, l'idée est d'utiliser un **schéma VFRoe [1] en $Z = (A, \varphi, s, Q, H)^T$** .

On obtiendra alors $Z(W_L, W_R, 0^\pm)$ et on en déduira $W(W_L, W_R, 0^\pm)$. Dans certains cas le changement de variables n'est pas inversible : il faudra adapter l'approche.

• Correction entropique

Le schéma VFRoe approche mal les ondes de détente traversant l'interface $x = 0$ et autorise en ces points des chocs non physiques. C'est le cas lorsqu'une valeur propre associée à un k-champ vraiment non linéaire vérifie $\lambda_k(W_i^n) \leq 0 \leq \lambda_{k+1}(W_i^n)$.

On remplace alors le flux numérique F par :

$$G(W_i^n, W_{i+1}^n, 0^\pm) = F(W_i^n, W_{i+1}^n, 0^\pm) - \min_k (|\lambda_k(W_i^n)|, |\lambda_k(W_{i+1}^n)|) (W_{i+1}^n - W_i^n) / 2.$$

• Rééchantillonnage

On retourne à la grille d'origine par la procédure de Glimm [2]. On construit une suite aléatoire $\omega_n \in [0, 1]$, puis on prend :

$$W_i^{n+1} = \begin{cases} W_{i-1}^{n+1,-}, & \text{si } \omega_n < \frac{\tau_n}{\Delta x_i} \max(v_{i-1/2}^n, 0), \\ W_i^{n+1,-}, & \text{si } \frac{\tau_n}{\Delta x_i} \max(v_{i-1/2}^n, 0) \leq \omega_n \leq 1 + \frac{\tau_n}{\Delta x_i} \min(v_{i+1/2}^n, 0), \\ W_{i+1}^{n+1,-}, & \text{si } \omega_n > 1 + \frac{\tau_n}{\Delta x_i} \min(v_{i+1/2}^n, 0). \end{cases} \quad (12)$$

• Propriétés du schéma

Le schéma numérique ainsi construit vérifie les propriétés suivantes :

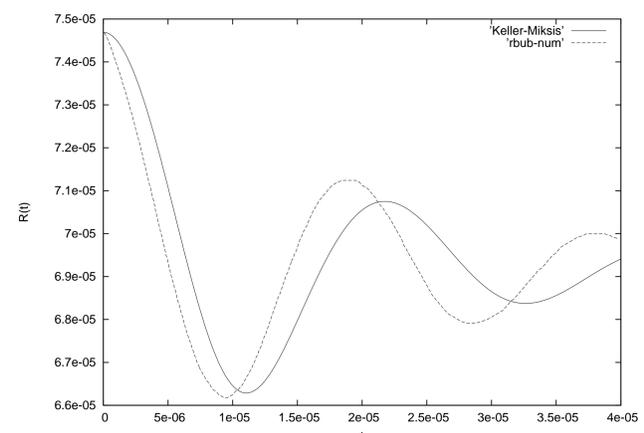
– il est well-balanced dans le sens où **il préserve tous les états stationnaires** (c.à.d. les données initiales pour lesquelles les quantités φ , s , Q , H sont constantes) ;

– si la fraction de masse φ ne prend que les deux valeurs 0 ou 1 , cette propriété est préservée à tout moment.

Application à une bulle

On valide notre modèle en simulant les oscillations d'une bulle sphérique de gaz dans l'eau. Pour cela, on suppose une invariance en rotation et on adopte une approche 1D avec une section variable $A(x) = 4\pi x^2$.

On trace le rayon de la bulle que l'on compare au modèle EDO de Keller-Miksis [3], on obtient :



Bibliographie

[1] P. HELLUY, J.-M. HÉRARD AND H. MATHIS, *A well-balanced approximate Riemann solver for variable cross-section compressible flows.*, Computational Fluid Dynamics, June 2009.

[2] C. CHALONS AND F. COQUEL, *Computing material fronts with Lagrange-Projection approach.*, HYP2010 Proc. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00548938/fr/>.