Intelligence numérique
Mathématiques pour la géométrie - M2
Année scolaire 2014 - 2015
Jonathan Jung/Pierre Alliez

TD 2

Exercice 1 : Localisation dans un convexe

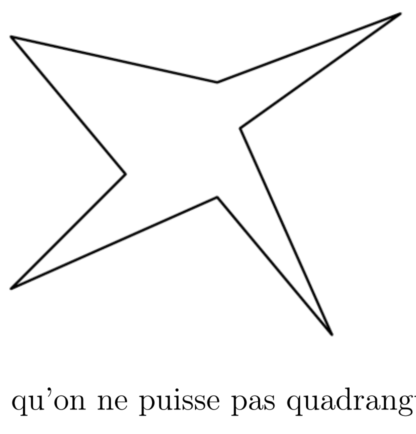
On considère un polygone convexe $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ et l'on veut effectuer des requêtes : on propose un point q et l'on doit répondre si q est à l'intérieur ou à l'extérieur de $\mathcal{P}$.

1. Expliquer comment répondre à cette question pour un seul point q. Quel est la complexité de votre algorithme.
2. Proposer un prétraitement de $\mathcal{P}$ pour répondre plus rapidement à une requête. Quel est la complexité du prétraitement ? quel est la complexité du traitement d'une requête ?

Exercice 2 : Quadrangulation

Etant donné un ensemble S de n points. On va regarder des quadrangulations de l'enveloppe convexe de ces n points, c'est-à-dire un découpage en quadrilatères (polygones à 4 cotés) ayant leurs sommets dans S. On appelle k la taille de l'enveloppe convexe.

1. Déterminer le nombre exact de quadrilatères dans une telle quadrangulation et en déduire une condition nécessaire sur n et k pour qu'une telle quadrangulation puisse exister (utiliser la relation d'Euler).
2. Quadranguler l'intérieur du polygone suivant sans ajouter de points.



3. Trouver un polygone à 8 cotés qu'on ne puisse pas quadranguler, et justifier.

Exercice 3 : Interpolation de courbe

1. Construire une chaine polygonale inscrite dans un cercle (elle est dite interpolante car ses points sont sur le cercle). Calculer l'erreur d'interpolation en fonction du rayon du cercle R et de la longueur d_n d'un segment. Quel est le nombre de segments nécessaires pour une erreur d'interpolation donnée du cercle ? (en complexité asymptotique).

2. Extrapoler pour une courbe lisse quelconque mais de courbure bornée.

Exercice 4 : Hiérarchie sur un maillage de surface triangulaire

1. Donner deux façons de construire une hiérarchie (combinatoire) sur un maillage triangulaire de surface (fin vers grossier et vice-versa).
2. Dessiner l'opération atomique de fusion d'arête sur un maillage triangulaire, avec un petit voisinage pour les deux sommets de l'arête. Dans quel cas la propriété 2-manifold combinatoire est-elle non-préservée ? (2-manifold signifie qu'une arête est incidente à un ou deux triangles). Supposons un arête AB et un triangle incident ABC. Dessiner le cas où le sommet C est de degré 3. Imaginer un algorithme pour faire le test correspondant.
3. La propriété 2-manifold est une condition seulement combinatoire. Toujours en 2D quelle condition géométrique doit être vérifiée pour que le maillage soit localement toujours bien plongé (partitionne le domaine avec des triangles dont l'aire est toujours positive).
4. Supposons que nous disposons d'une librairie permettant de calculer l'intersection de deux ensembles, comment peut-on trouver les points du noyau du polygone ?

Exercice 5 : Fonctions implicites

1. Comment est définie une surface dite implicite ? Sous quelle condition est-elle bien définie ?
2. Donner des exemples de fonctions pour un plan, une sphère, un cône. A quoi correspond la valeur de la fonction dans chaque cas ?
3. Comment définir simplement une surface implicite à partir de points dont on connait la position et la normale à la surface ?

Exercice 6 : Courbes de subdivision

1. Dessiner une courbe polygonale simple fermée, et appliquer l'algorithme de Chaiken (cut-corner). Quelle est la propriété de la courbe après subdivision ? idem en fonction de l'enveloppe convexe de la chaine initiale ?
2. Faire la même chose pour un schéma interpolant.

Exercice 7 : Surfaces de subdivision

1. Que signifie un schéma stationnaire ? Pourquoi peut-on l'analyser simplement ? Via quelle méthode ?
2. Dans un contexte de visualisation interactive, imaginer un algorithme de raffinement parcimonieux qui dépend du point de vue et de la taille des triangles projetés à l'écran.

Exercice 8 : Analyse en composantes principales

1. On considère un ensemble de points $x_1, x_2, ..., x_n$ dans $\mathbb{R}^3$. On cherche à trouver un plan qui minimise la somme des carrés des distances des points à leur projection sur ce plan. Ecrire la procédure pour calculer un tel plan.

2. En reprenant le même contexte que la question précédente, analyser chacune des situations suivantes (en termes de propriétés de la matrice de covariance, des valeurs propres, du plan optimal) : lorsque l'ensemble contient 1 point, 2 points, 3 points, n points sur un plan, n points sur une droite et n points en position quelconque.
3. Que se passe-t-il si l'on a non plus des points mais des primitives comme des segments ou des triangles ?

Exercice 9 : Structures de donnée en demi-arêtes

1. Dessiner une configuration de faces et demi-arêtes autour d'un sommet v d'un maillage triangulaire.
2. Elaborer une procédure pour circuler sur les sommets incidents à v.
3. Dessiner une configuration de demi-arêtes autour d'une face f d'un maillage polygonal avec des polygones de degrés quelconques.
4. Elaborer une procédure pour circuler sur les demi-arêtes autour de f.
5. Décrire une procédure pour compter le nombre de composantes connexes d'un maillage polyédrique.
6. Décrire une procédure pour compter le nombre de composantes connexes de bords (donc le nombre de bords) d'un maillages polyédrique à bords (on fait l'hypothèse que l'on peut tester si une demi-arête est au bord via la fonction $is\_boundary(halfedge)$).
7. Comment faire pour afficher les arêtes du maillage en noir si ordinaires, en rouge si appartenant au bord (chaque arête comprend deux demi-arêtes).

Exercice 10 : Dualisation de surfaces polyédriques La dualisation consiste à échanger les faces et les sommets du maillage.

1. Décrire une procédure (traversant une structure de données en demi-arêtes) pour transformer un maillage en son dual.
2. Quelles coordonnées peut-on choisir pour le sommet au milieu des faces ?
3. Que se passe-t-il si on itère la procédure de dualisation sur un polyèdre convexe ? comment peut-on éviter ce phénomène ?
4. Que se passe-t-il si le polyèdre contient des bords ?