L2S3 Physique/MPC
Calcul Formel et Simulation Numérique

Correction du deuxième contrôle continu

Durée totale : 1 heure

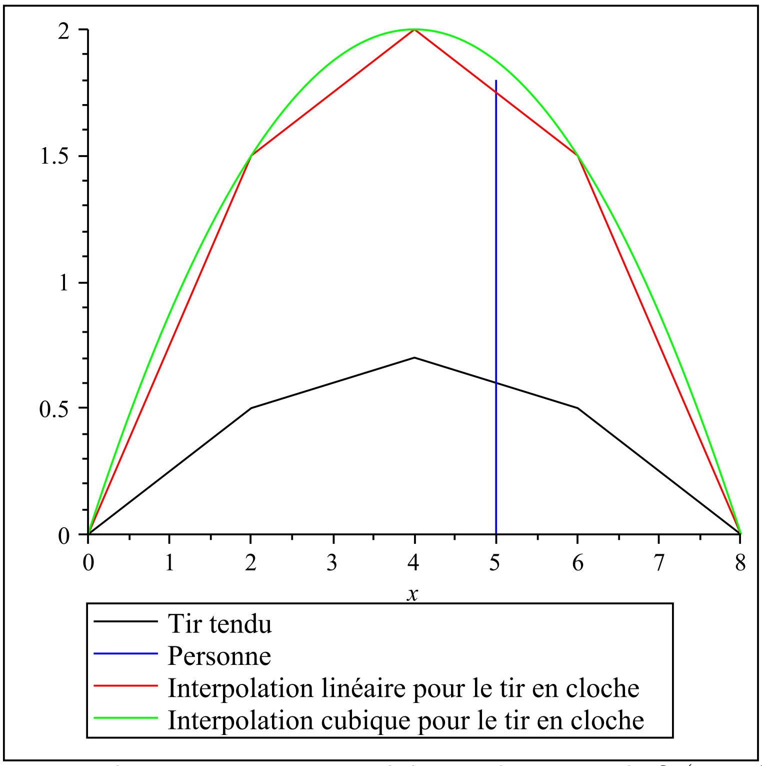
Les calculatrices, téléphones portables, baladeurs et documents sont interdits.
Le barême est donné à titre indicatif et pourra être modifié.
Prenez le temps de bien rédiger et réfléchir... Bon courage !

Premier exercice (10 points)

On considère un projectile qui part du point $(0, 0)$ et arrive au point $(8, 0)$. Il y a deux trajectoires possibles : le tir tendu et le tir en cloche. Dans le cas du tir tendu, la trajectoire passe par les points $(2, 0.50)$, $(4, 0.70)$, $(6, 0.50)$. Dans le cas du tir en cloche, la trajectoire passe par les points $(2, 1.50)$, $(4, 2.00)$, $(6, 1.50)$. On suppose que le projectile est assimilé à un point.

1) (0.5 point) Faire un dessin.

2.) (0.5 point) On considère une personne modélisée par le segment $[(5, 0), (5, 1.80)]$. Compléter le dessin.



3) (1 point) Pensez-vous que la personne est touchée par le tir tendu ? (justifier)

Oui. La hauteur maximale pour le tir tendu est de 0.70 et la personne mesure $1.80 > 0.70$ donc elle sera touchée par le tir tendu.

4) (2 points) La personne est-elle touchée par le tir en cloche, si l'on considère une interpolation linéaire ? (justifier par un calcul)

Pour savoir si la personne est touchée, comma $4 < 5 < 6$, il faut regarder si droite D passant par les couples $(4, 2.00)$ et $(6, 1.50)$ coupe le segment $[(5, 0), (5, 1.80)]$. L'équation de la droite D est

$$y = \frac{1.5 - 2}{6 - 4}(x - 4) + 2 = -\frac{1}{4}(x - 4) + 2.$$

Ainsi en $x = 5$, cette droite passe par le point

$$y(5) = -\frac{1}{4}(5 - 4) + 2 = -\frac{1}{4} + 2 = -0.25 + 2 = 1.75 < 1.80.$$

Comme $1.75 \in [0; 1.80]$, si l'on considère une interpolation linéaire, la personne est touchée par le tir en cloche.

5) (3 points) La personne est-elle touchée par le tir en cloche, si l'on considère une interpolation cubique ? (justifier par un calcul)
(Indication : $1.80 = \frac{9}{5} = \frac{72}{40}$)

Comme $4 < 5 < 6$, on cerche un polynôme de degré ≤ 3 passant par les couples $(2, 1.50)$, $(4, 2.00)$, $(6, 1.50)$ et $(8, 0)$. Ce polynôme s'écrira sous la forme

$$P(x) = 1.5\,\omega_2(x) + 2\,\omega_4(x) + 1.5\,\omega_6(x) + 0\,\omega_8(x),$$

où ω_2 est le polynôme de degré 3 qui s'annule en 4, 6, 8 et qui vaut 1 en 2, ω_4 est le polynôme de degré 3 qui s'annule en 2, 6, 8 et qui vaut 1 en 4, ω_6 est le polynôme de degré 3 qui s'annule en 2, 4, 8 et qui vaut 1 en 6 et ω_8 est le polynôme de degré 3 qui s'annule en 2, 4, 6 et qui vaut 1 en 8. On peut alors écrire $P(x)$ sous la forme

$$P(x) = 1.5\frac{(4 - x)(6 - x)(8 - x)}{2 \times 4 \times 6} + 2\frac{(2 - x)(6 - x)(8 - x)}{(-2) \times 2 \times 4} + 1.5\frac{(2 - x)(4 - x)(8 - x)}{(-4) \times (-2) \times 2} + 0\,\omega_8(x).$$

Ainsi en $x = 5$, on a

$$\begin{aligned} P(5) &= \frac{3}{2}\frac{(-1) \times 1 \times 3}{2 \times 4 \times 6} + 2\frac{(-3) \times 1 \times 3}{(-2) \times 2 \times 4} + \frac{3}{2}\frac{(-3) \times (-1) \times 3}{(-4) \times (-2) \times 2} \\ &= -\frac{3}{32} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} = \frac{24}{32} + \frac{9}{8} = \frac{6}{8} + \frac{9}{8} \\ &= \frac{15}{8} = \frac{75}{40} > \frac{72}{40} = 1.80. \end{aligned}$$

Ainsi, avec une interpolation cubique, la valeur approchée de la fonction en $x = 5$ est $P(5) = \frac{15}{8} > 1.80$, le projectile passe au-dessus de la personne.

6) (2 points) Laquelle des solutions vous parait la plus acceptable, sachant que la trajectoire est pratiquement parabolique ? (justifier)
Comme la trajectoire est pratiquement parabolique, elle peut pratiquement s'écrire sous la forme d'un polyôme de degré 2 (cad $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$).

L'interpolation cubique, étant exacte pour des polynômes de degré ≤ 3, semble la plus appropiée. On peut donc penser que la personne ne sera pas touchée par le tir en cloche.

7) (Bonus : 1 point) Quelle méthode (rectangles à droite, rectangles à gauche, trapèzes, Simpson) vous semble la plus appropriée pour évaluer l'aire sous la courbe correspondant au tir en cloche ? Pourquoi ?
Comme la trajectoire peut pratiquement se décrire sous la forme d'un polynôme de degré 2 et que la méthode de Simpson nous donne une valeur exacte pour des polynôme de degré ≤ 3, la méthode de Simpson semble la plus appropriée pour évaluer l'aire sous la courbe correspondant au tir en cloche.

Deuxième exercice (11 points)

On souhaite utiliser différentes méthodes d'intégration numérique pour évaluer

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$

On notera f la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$.
1) (2 points) Utiliser la formule des rectangles à gauche (en utilisant les 3 points d'abscisse $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ et $x = 2$) pour évaluer cette intégrale.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x} dx &= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{x} dx, \\
&\approx (\frac{3}{2} - 1) f(1) + (2 - \frac{3}{2}) f(\frac{3}{2}), \\
&= (\frac{3}{2} - 1) \frac{1}{1} + (2 - \frac{3}{2}) \frac{1}{\frac{3}{2}}, \\
&= \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

2) (2 points) Utiliser la formule des rectangles à droite (en utilisant les 3 points d'abscisse $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ et $x = 2$) pour évaluer cette intégrale.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x} dx &= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{x} dx, \\
&\approx (\frac{3}{2} - 1) f(\frac{3}{2}) + (2 - \frac{3}{2}) f(2), \\
&= (\frac{3}{2} - 1) \frac{1}{\frac{3}{2}} + (2 - \frac{3}{2}) \frac{1}{2}, \\
&= \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

3) (2 points) Utiliser la formule du point milieu (en utilisant les 3 points d'abscisse $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ et $x = 2$) pour évaluer cette intégrale.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x}dx &= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x}dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{x}dx,\\
&\approx (\frac{3}{2}-1)f(\frac{1+\frac{3}{2}}{2}) + (2-\frac{3}{2})f(\frac{\frac{3}{2}+2}{2}),\\
&= \frac{1}{2}f(\frac{5}{4}) + \frac{1}{2}f(\frac{7}{4}),\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{7}{4}},\\
&= \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{24}{35}.
\end{aligned}$$

4) (2 points) Utiliser la formule des trapèzes (en utilisant les 3 points d'abscisse $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ et $x = 2$) pour évaluer cette intégrale.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x}dx &= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x}dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{x}dx,\\
&\approx (\frac{3}{2}-1)\frac{f(1)+f(\frac{3}{2})}{2} + (2-\frac{3}{2})\frac{f(\frac{3}{2})+f(2)}{2},\\
&= \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{1}+\frac{2}{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{2},\\
&= \frac{1}{2}\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\frac{7}{12} = \frac{5}{12} + \frac{7}{24},\\
&= \frac{17}{24}.
\end{aligned}$$

5) (2 points) Utiliser la formule de Simpson (en utilisant les 3 points d'abscisse $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ et $x = 2$) pour évaluer cette intégrale.

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \omega_0 f(1) + \omega_1 f(\frac{3}{2}) + \omega_2 f(2),$$

avec $\omega_0 = \omega_2 = \frac{h}{3} = \frac{\frac{2-1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$ et $\omega_1 = \frac{4h}{3} = \frac{4\frac{2-1}{2}}{3} = \frac{2}{3}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x}dx &\approx \frac{1}{6}\frac{1}{1} + \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\frac{1}{2},\\
&= \frac{1}{6} + \frac{4}{9} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{25}{36}.
\end{aligned}$$

6) (1 point) Calculer la valeur exacte de cette intégrale. Quelle est la meilleure approximation ? (Indication : $\ln(2) \approx 0.6931471806$, $\frac{5}{6} \approx 0.8333333333$, $\frac{24}{35} \approx 0.6857142857$, $\frac{7}{12} \approx 0.5833333333$, $\frac{25}{36} \approx 0.6944444444$, $\frac{24}{35} \approx 0.7083333333$.)
La valeur exacte de l'intégrale est donnée par

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

Les différentes estimations données en indication nous permettent de comparer les résultats, l'approximation la plus proche du résultat exact est $\frac{25}{36}$ que l'on avait obtenue avec la méthode de Simpson.

Troisième exercice (5 points)

Décrire un algorithme utilisant la formule de Simpson pour calculer une approximation de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin(x)} dx$, en utilisant 6 intervalles ($N = 6$). On utilisera la Table 1.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\frac{1}{1+\sin(x)}$	1	0.6667	0.5359	0.5	0.5359	0.6667	1

Table 1 – la fonction $\frac{1}{1+\sin(x)}$

On rentre les différentes valeurs de $\frac{1}{1+\sin(x)}$ données dans la Table 1, dans une liste.

[> $L := [1, 0.6667, 0.5359, 0.5, 0.5359, 0.6667, 1]$:

[> $N := nops(L) - 1$:

$h := \frac{\pi-0}{N}$:

$intsimp := add(\frac{h}{3}L[2k+1] + \frac{4h}{3}L[2k+1+1] + \frac{h}{3}L[2k+2+1], k = 0..\frac{N}{2} - 1)$:

$evalf(intsimp)$;

$$2.003149290$$