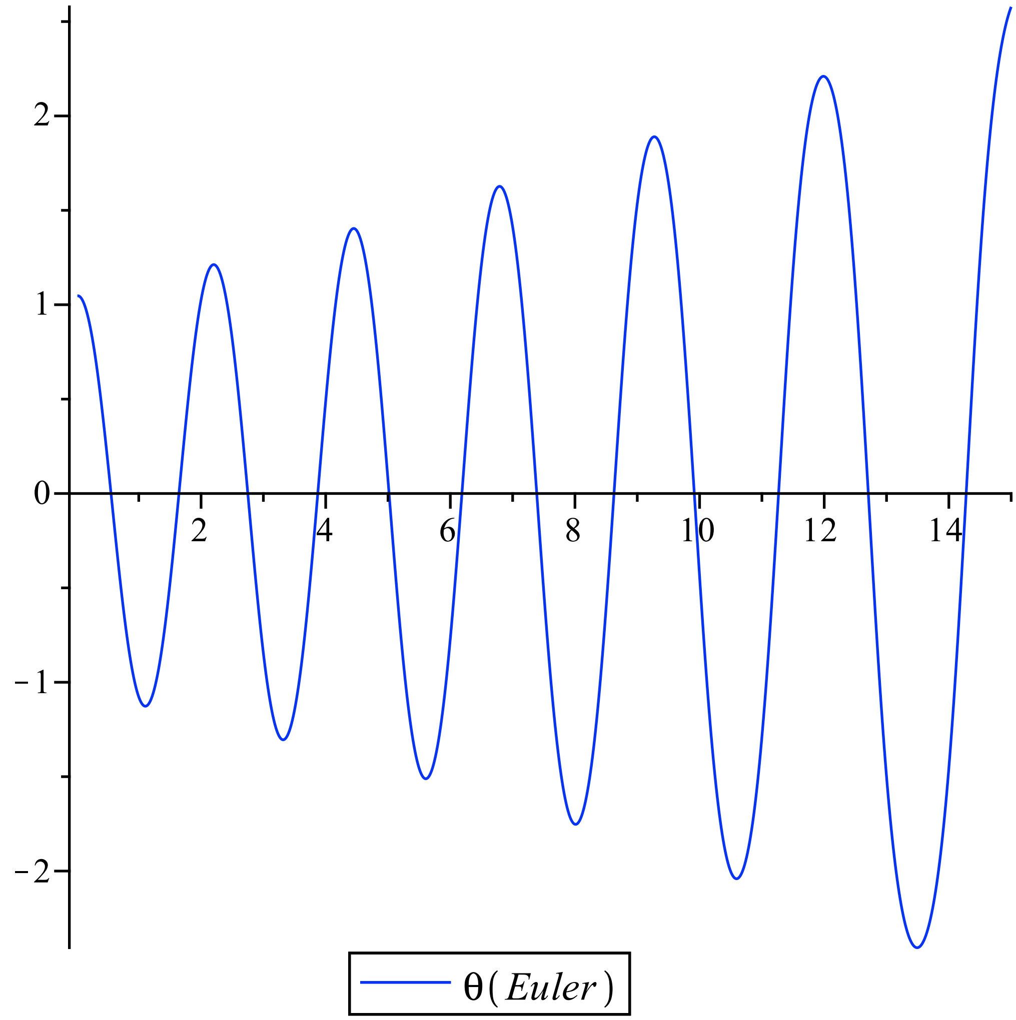
5.7 Exercices

Exercice 30

```
> restart : with(plots) :
> Digits := 100 :
> #Solution par la méthode d'Euler explicite
> penduleEuler := proc(t0, T, theta0, thetaprim0, N)
   local h, y, i, g, l, f1, f2 :
   global thetaeul :
   h := evalf((T - t0)/N) :
   g := 9.8 : l := 1. :
   thetaeul := array(1..N) :
   y := array(1..N) :
   thetaeul[1] := theta0 :
   y[1] := thetaprim0 :
   f1 := (u, v) -> v :
   f2 := (u, v) -> - g/l · sin(u) :
   for i from 1 to N - 1 do
   thetaeul[i + 1] := evalf(thetaeul[i] +
  h·f1(thetaeul[i], y[i])) :
   y[i + 1] := evalf(y[i] + h·f2(thetaeul[i], y[i])) :
   od:
   end proc:
>
> t0 := 0 : T := 15; N := 1000 :
```

$$T := 15 \tag{2.1.1}$$

```
> penduleEuler(t0, T, Pi/3, 0, N) :
> G1 := plot([seq(t0 + n·(T - t0)/N, n = 1..N)], [seq(thetaeul[n], n = 1..N)], color
       = blue, legend = theta(Euler)) :
> display(G1);
```




```
> #Solution par la méthode de Runge explicite
>
> pendulеRunge := proc(t0, T, theta0, thetaprim0, N)
  local h, y, i, g, l, f1, f2, k1a, k1b, k2a, k2b :
  global thetaR :
  h := evalf((T - t0)/N) :
  g := 9.8 : l := 1. :
  thetaR := array(1..N) :
  y := array(1..N) :
  thetaR[1] := theta0 :
  y[1] := thetaprim0 :
  f1 := (u, v) -> v :
  f2 := (u, v) -> -g/l·sin(u) :
  for i from 1 to N - 1 do
  k1a := f1(thetaR[i], y[i]) :
  k1b := f2(thetaR[i], y[i]) :
```

$k2a := f1\left(thetaR[i] + \frac{h}{2} \cdot k1a, y[i] + \frac{h}{2} \cdot k1b\right) :$

$k2b := f2\left(thetaR[i] + \frac{h}{2} \cdot k1a, y[i] + \frac{h}{2} \cdot k1b\right) :$

$thetaR[i+1] := evalf(thetaR[i] +$
$h \cdot k2a) :$
$y[i+1] := evalf(y[i] + h \cdot \mathrm{k2b}) :$
od:
end proc:

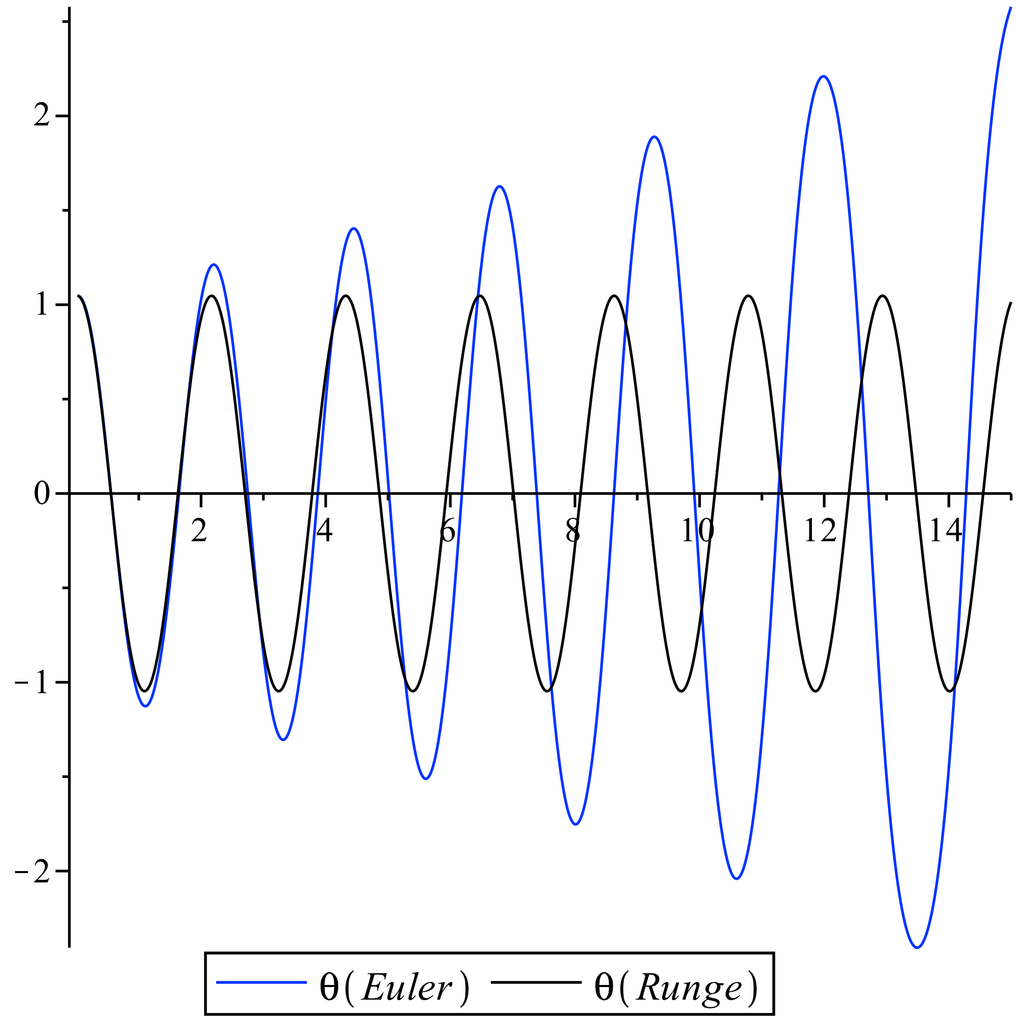
\>

\>

\> $penduleRunge\left(t0, T, \frac{\mathrm{Pi}}{3}, 0, N\right) :$

\> $G2 := plot\left(\left[seq\left(t0 + n \cdot \frac{(T - t0)}{N}, n = 1..N\right)\right], [seq(thetaR[n], n = 1..N)], color = black, legend = \mathrm{theta}(Runge)\right) :$

\> $display(G1, G2);$



>

> *#Solution par la méthode de Runge-Kutta 4*

>

> $penduleRK4 := \mathbf{proc}(t0, T, theta0, thetaprim0, N)$
local $h, y, i, g, l, f1, f2, k1a, k1b, k2a, k2b, k3a, k3b, k4a, k4b$:
global $thetaRK4$:

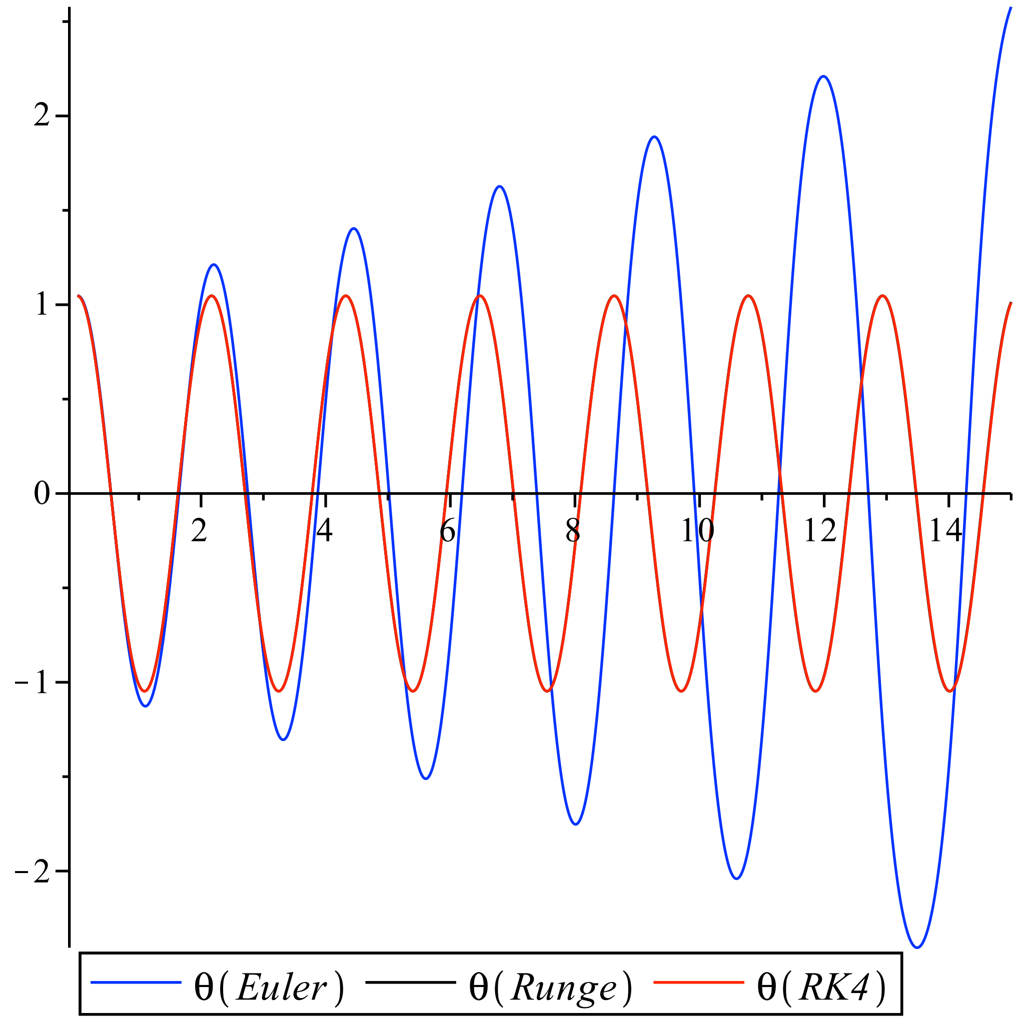
$$h := evalf\left(\frac{(T - t0)}{N}\right) :$$

$g := 9.8 : l := 1. :$
$thetaRK4 := array(1..N) :$
$y := array(1..N) :$
$thetaRK4[1] := theta0 :$
$y[1] := thetaprim0 :$
$f1 := (u, v) \rightarrow v :$

$$f2 := (u, v) \rightarrow -\frac{g}{l} \cdot \sin(u) :$$

for i **from** 1 **to** $N - 1$ **do**
$k1a := f1(thetaRK4[i], y[i]) :$
$k1b := f2(thetaRK4[i], y[i]) :$

```
k2a := f1(thetaRK4[i] + h/2·k1a, y[i] + h/2·k1b) :
k2b := f2(thetaRK4[i] + h/2·k1a, y[i] + h/2·k1b) :
k3a := f1(thetaRK4[i] + h/2·k2a, y[i] + h/2·k2b) :
k3b := f2(thetaRK4[i] + h/2·k2a, y[i] + h/2·k2b) :
k4a := f1(thetaRK4[i] + h·k3a, y[i] + h·k3b) :
k4b := f2(thetaRK4[i] + h·k3a, y[i] + h·k3b) :
thetaRK4[i + 1] := evalf(thetaRK4[i] + h·(k1a + 2·k2a + 2·k3a + k4a)/6) :
y[i + 1] := evalf(y[i] + h·(k1b + 2·k2b + 2·k3b + k4b)/6) :
od:
end proc:
>
> penduleRK4(t0, T, Pi/3, 0., N) :
>
> G3 := plot([seq(t0 + n·(T − t0)/N, n = 1 ..N)], [seq(thetaRK4[n], n = 1 ..N)],
    color = red, legend = theta(RK4)) :
> display(G1, G2, G3);
```



> #On remarque que le schéma de Runge et RK4 donne des résultats nettement meilleurs que le schéma d'Euler explicite dans lequel l'amplitude des oscillation s'amplifie, ce qui est absurde.

> #On ne constate pas de différence entre le schéma de Runge explicite et RK4, on va donc réduire le nombre de points pour voir si on obtient une différence:

> $N2 := 100 :$

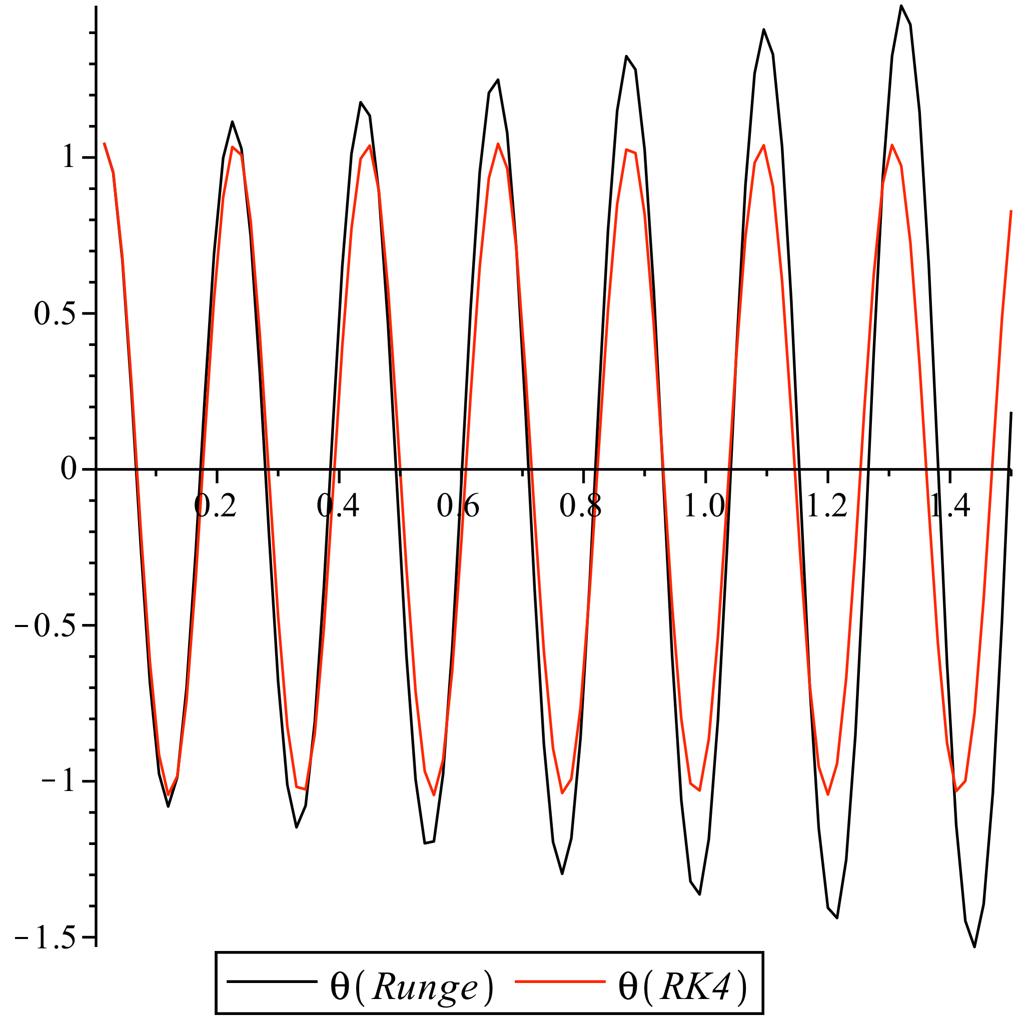
> $penduleRunge\left(t0, T, \frac{\mathrm{Pi}}{3}, 0, N2\right) :$

> $G5 := plot\left(\left[seq\left(t0 + n\cdot\frac{(T - t0)}{N}, n = 1..N2\right)\right], [seq(thetaR[n], n = 1..N2)], color = black, legend = \mathrm{theta}(Runge)\right) :$

> $penduleRK4\left(t0, T, \frac{\mathrm{Pi}}{3}, 0., N2\right) :$

> $G6 := plot\left(\left[seq\left(t0 + n\cdot\frac{(T - t0)}{N}, n = 1..N2\right)\right], [seq(thetaRK4[n], n = 1..N2)], color = red, legend = \mathrm{theta}(RK4)\right) :$

> *display*(*G5*, *G6*);



> #On constate que RK4 donne une meilleure approximation de la solution que le schéma de Runge explicite.

>