Chapitre 5

Tests statistiques

Contents

Fournir les tables numériques pour les tests.

1 Introduction

On dispose de données sur le poids d'un échantillon de 15 chats sauvages attrapés dans les Ardennes :

$$poids = c\,(5.72, 4.06, 4.30, 3.45, 3.08, 2.68, 4.86, 5.76, 4.90, 4.28, 5.13, 3.93, 4.95, 4.72, 5.85)\,.$$

On veut vérifier si le poids de ces chats est similaire au poids de référence de l'espèce en France, 5 kilos. On peut calculer la moyenne :

$$\bar{x} = 4.511333.$$

Ces chats sont plus légers ; mais on ne peut pas conclure, uniquement sur la base de la différence observée, que les chats sauvages des Ardennes sont plus légers que la moyenne des chats sauvages français. En effet, il est possible que les chats attrapés soient plus léger par hasard, mais que l'ensemble des chats sauvages des Ardennes ait en moyenne le même poids que leurs homologues français. Pour savoir si l'écart observé est du au hasard on va pratiquer un test statistique ; dans cette situation ce sera un test de comparaison à une moyenne de référence.

Pour les chats dans les Ardennes, on a

$$\hat{\sigma} = 0.9588748.$$

On a envie de dire que si $\mu = 5$ est dans l'intervalle de confiance pour μ on accepte le test et sinon on le refuse.

On est dans le cas d'un n petit, si on suppose que les X_i suivent des lois normales $N(\mu_0, \sigma_0)$, on a que

$$S = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

suit une loi de Student à $n - 1$ degrès de liberté.

De plus, si on suppose que $\mu_0 = \mu$ (hypothèse de notre test), on peut calculer

$$S_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = -1.973769.$$

or un intervalle de confiance pour μ à 95% était

$$\mu \in \left[\bar{x} - Q_{0.95} \times \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Q_{0.95} \times \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$$

avec $Q_{0.95} = 2.14$ pour une loi de Student à $n - 1$ degrès de liberté. On obtient alors

$$[3.980326; 5.042341]$$

et 5 appartient à cet intervalle donc on accepte l'hypothèse $\mu = \mu_0$.

On va maintenant effectuer la même procédure pour différents tests en utilisant le vocabulaire des tests.

2 Définitions

2.1 Hypothèse nulle et alternative

Un test **paramétrique** est une procédure de décision entre deux hypothèses concernant la valeur des paramètres d'un modèle probabiliste.

L'**hypothèse nulle** notée H_0 est celle que l'on considère vraie à priori. Le but du test est de décider si cette hypothèse est à priori crédible.

L'**hypothèse alternative** notée H_1 est l'hypothèse complémentaire de H_0.

Revenons à notre exemple sur les chats. Nous avons

- H_0 : la moyenne des poids des chats sauvages des Ardennes est la même que celle des chats sauvages français.
- H_1 : la moyenne des poids des chats sauvages des Ardennes est différente de celle des chats sauvages français.

2.2 Statistique - Région de rejet - Latéralité

La **statistique de test** S est une fonction qui résume l'information sur l'échantillon (ou la valeur) qu'on veut tester. On la choisit de façon à pouvoir calculer sa loi sous H_0.

On peut alors définir une **région de rejet** dont dépendra la décision d'accepter ou de rejeter H_0 : on rejette H_0 si la valeur observée de la statistique, calculée à partir des données, appartient à la région de rejet.

Suivant le problème posé, il faut choisir la latéralité du test, qui définit la forme de la région de rejet :

- **test multilatéral** : On veut savoir si le paramètre étudié est trop grand ou trop petit, sans à priori. La région de rejet est alors de la forme $]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$.
- **test unilatéral** : On veut savoir si le paramètre est trop petit, ou si le paramètre est trop grand, sans se soucier de l'autre côté. Le région de rejet est alors de la forme $]-\infty; a]$ ou $[a, +\infty[$.

Dans le cas de nos chats, on a :

- Statistique :$S = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$.
- On prend un test bilatéral car la loi de S est sumétrique, S peut aussi bien être positive que négative.

Pour les chats dans les Ardennes, on a

$$\hat{\sigma} = 0.9588748.$$

On obtient alors

$$S_{obs} = -1.973769.$$

2.3 Probabilité critique

La **probabilité critique** (ou p-valeur) est la probabilité, sous H_0, que la statistique soit au moins aussi éloignée de son espérance que la valeur observée. En d'autres termes, c'est la probabilité d'observer quelque chose d'au moins aussi surprenant que ce que l'on observe.

Si le test est unilatéral à droite (région de rejet de la forme $[a, +\infty[$), la probabilité critique est $\mathbb{P}_{H_0}(S > S_{obs})$.

Si le test est unilatéral à gauche (région de rejet de la forme $]-\infty; a]$), la probabilité critique est $\mathbb{P}_{H_0}(S < S_{obs})$.

Si le test est bilatéral et que la loi de la statistique est symétrique par rapport à 0 (région de rejet de la forme $]-\infty; -a] \cup [a, +\infty[$), la probabilité critique est $\mathbb{P}_{H_0}(|S| > |S_{obs}|)$.

Dans le cas des chats, la probabilité critique correspond à

$$\mathbb{P}_{H_0}(|S| > |S_{obs}|)$$

c'est-à-dire à la probabilté que $|S| > |S_{obs}|$ sachant que H_0 est vrai (c'est-à-dire $\mu = 5$). Si H_0 est vrai, on sait que S suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté. On peut alors calculer

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|S| > |S_{obs}|) &= \mathbb{P}(|S| > |-1.9738|) = \mathbb{P}(|S| > 1.9738) \\
&= \mathbb{P}(S > 1.9738) + \mathbb{P}(S < -1.9738) = 2\mathbb{P}(S < -1.9738) \\
&= [2\,\texttt{pt}(-1.9738, \mathit{df} = n-1)] \\
&= 0.06848.
\end{aligned}$$

2.4 Risque de première espèce ou confiance

On appelle **risque de première espèce** et on note $1-\alpha$ le seuil au-dessous duquel un évènement sous H_0 est jugé exceptionnel. La quantité α est la confiance du test. Ce seuil est celui auquel on va comparer la p-valeur :

- si la p-valeur est supérieure à $1-\alpha$, il n'est pas exceptionnel sous H_0 d'observer la valeur effectivement observée. Par conséquent, H_0 n'est pas rejeté.
- si la p-valeur est inférieure à $1-\alpha$, la valeur observée est jugée exceptionnelle sous H_0. On décide alors de rejeter H_0 et de valider H_1.

Pour le cas des chats, cela revient exactement à dire que l'on accepte H_0 si la moyenne $\bar{x}$ est dans l'intervalle de confiance pour $\bar{X}$ et à accepter H_1 sinon. Dans notre cas, comme

$$p - valeur = 0.06848 > 1 - \alpha = 0.05,$$

on accepte H_0.

2.5 Risque de deuxième espèce ou puissance

On appelle **risque de deuxième espèce** et on note β la probabilité d'accepter H_0 alors que la vérité est H_1. La quantité $1-\beta$ est la puissance du test.

		Vérité	
		H_0	H_1
Décision	H_0	α	β
	H_1	$1-\alpha$	$1-\beta$

2.6 Principe d'un test

Les étapes d'un test sont toujours réalisées dans l'ordre suivant :

1. Choix du risque α,
2. Choix du type de test et de sa latéralité si besoin
3. Calcul de la statistique de test
4. Calcul de la p-valeur
5. Conclusion

En pratique, l'utilisation d'un logiciel type R permet de ne pas se soucier des partie 3) et 4). Par contre, les choix liées aux étapes 1) et 2) ainsi que l'interprétation finale ne peuvent être faits par le logiciel.

3 Quel test pour quelle question ?

3.1 Tests d'adéquation

3.1.a Adéquation de l'espérance pour un écart-type σ_0 connue

Hypothèses : On considère un échantillon de données de taille n, de moyenne $\bar{x}$. On veut savoir s'il est crédible de penser que l'échantillon a été tiré dans une population de moyenne théorique μ_0 connue ou si la moyenne de l'échantillon μ est significativement différente de μ_0.

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Statistique : Sous H_0, on connait la loi de la statistique définie par

$$S = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}.$$

Il s'agit d'une loi normale centrée réduite.

Sous R : Ce test n'éxiste pas.

3.1.b Adéquation de l'espérance pour un échantillon de loi normale

Hypothèses : On considère un échantillon de données de taille n, de moyenne $\bar{x}$ et d'écart-type $\hat{\sigma}$. On suppose aussi que l'échantillon suit une loi normale. On veut savoir s'il est crédible de penser que l'échantillon a été tiré dans une population de moyenne théorique μ_0 connue ou si la moyenne de l'échantillon μ est significativement différente de μ_0.

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Statistique : Sous H_0, on connait la loi de la statistique de Student définie par

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}.$$

Il s'agit de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

Sous R : `t.test` en utilisant pour paramètres x pour l'échantillon et mu pour la valeur de μ_0.

3.1.c Adéquation de la variance pour un échantillon de loi normale et d'écart-type σ_0 connu

Hypothèses : On considère un échantillon de données de taille n, de moyenne $\bar{X}$, d'écart-type $\hat{\sigma}$. On suppose aussi que l'échantillon suit une loi normale. On veut savoir s'il est crédible de penser que l'échantillon a été tiré dans une population d'écart-type σ_0 connu ou si l'écart-type théorique de l'échantillon σ est significativement différent de σ_0.

$$H_0 : \sigma = \sigma_0,$$
$$H_1 : \sigma \neq \sigma_0.$$

Statistique : Sous H_0, on connait la loi de la statistique

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \quad \text{où} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Il s'agit d'une loi du chi-deux à $n-1$ degrés de liberté.

Sous R : ce test n'existe pas.

Fin du cours du 19/03/2020