

Modélisation du sous-sol à partir de données géologiques éparses.

Gocad

SEME 2013 Nancy

15 février 2013

Présentation du consortium Gocad



Guillaume Caumon

Membres du consortium

- Sociétés productrices de ressources fossiles ;
- Sociétés de traitements des déchets radioactifs ;
- Bureaux géologiques ;
- Sociétés minières ;
- Bureaux d'études en environnement ;
- Entreprises géotechniques & BTP...

Présentation de l'équipe

Aurore Back



Brahim Yahiaoui



Jérémy Dalphin



Jonathan Jung



Mario Quillas Saavedra



Mohamed El Bouajaji

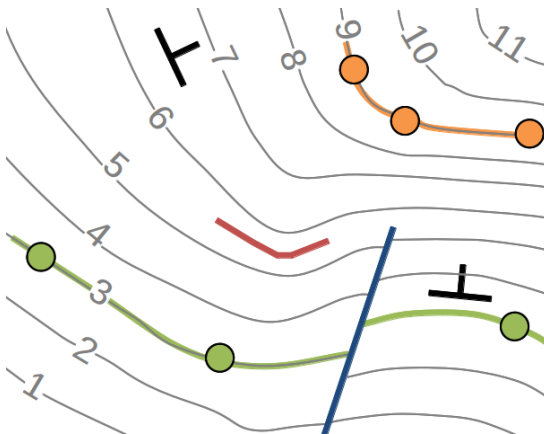


Pierre-William Martelli



Présentation du problème

On cherche à reconstruire les équipotentielles d'un champ scalaire à partir de valeurs et de gradients ponctuels.

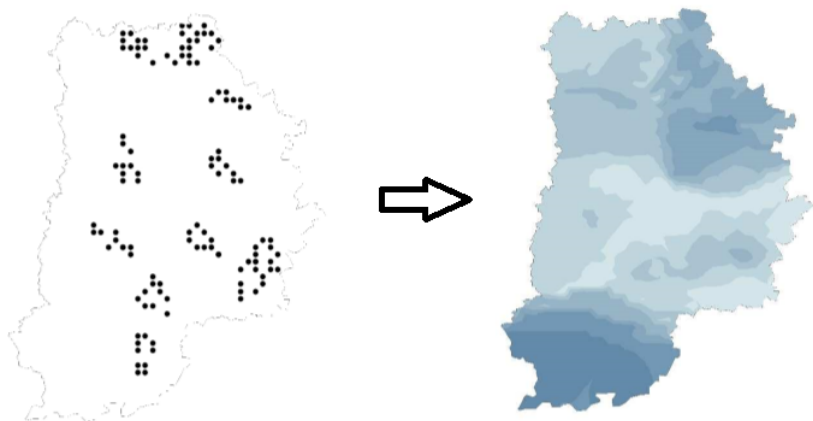


Méthode de Krigage

- Méthode géostatistique pour la reconstruction des lignes de niveau.
- Soit Z stationnaire d'ordre 2. K est sa covariance et m est son espérance. L'estimateur est supposé sans biais et le principe revient à **minimiser la variance**, i.e. résoudre $K\lambda = K_0$ avec :

$$K = \begin{pmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n,1} & \cdots & K_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad K_0 = \begin{pmatrix} K_{1,0} \\ \vdots \\ K_{n,0} \end{pmatrix}$$

$$Z^* = m + \sum_{i=1}^n \lambda_i (Z_i - m) \quad (1)$$

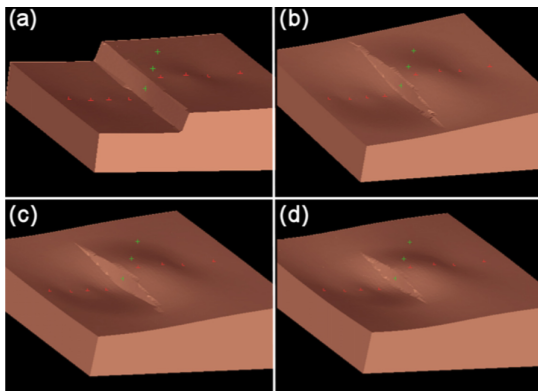


La méthode traite plusieurs cas continus, elle n'est en revanche pas assez fiable pour considérer des failles.

Dans l'article de Calcagno and al. (2008), on propose de coupler dans le krigeage les orientations et les points à interpoler.

$$Z^* = \sum_{i=1}^n \mu_i(Z_i) + \sum_{j=1}^{n'} \nu_j \frac{\partial m}{\partial u_j}$$

Pour considérer les failles on prend des fonctions drift à discontinuités.



Approche géologique : idées de base

Données :

- On connaît la valeur f_p de la fonction f en certains points $(x_p, y_p)_{1 \leq p \leq M}$,
- On connaît le gradient ∇f_q de f en certains points $(x_q, y_q)_{1 \leq q \leq L}$.

Objectif :

- Reconstruire la fonction f partout.

Hypothèses

- On se donne un maillage de tétraèdres $\mathcal{T}$, on souhaite approcher les valeurs $(f_i)_{1 \leq i \leq 4}$ de f en chaque sommet du tétraèdre.
- On suppose que f est linéaire sur chaque tétraèdre.
 - Si f est connue en un point $P \in \mathcal{T}$, on a :

$$\sum_{i=1}^4 u_i f_i = f_P,$$

où $(u_i)_{1 \leq i \leq 4}$ sont les coordonnées barycentriques de $(x, y, z)_P$ dans $\mathcal{T}$.

- Le gradient est constant sur chaque maille, si $(\nabla f)_P$ est connu, alors on a :

$$(\nabla f)_P = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \\ f_4 - f_1 \end{bmatrix}.$$

Conditions aux interfaces entre deux tétraèdres

- Si deux tétraèdres $\mathcal{T}^0$ et $\mathcal{T}^1$ ont un sommet P en commun, on a :

$$(f_P)_{P \in \mathcal{T}^0} = (f_P)_{P \in \mathcal{T}^1}.$$

- Si deux tétraèdres $\mathcal{T}^0$ et $\mathcal{T}^1$ sont situés de part et d'autre d'une faille, on dédouble les points.
- Si deux tétraèdres $\mathcal{T}^0$ et $\mathcal{T}^1$ ont une surface S en commun, on suppose que :

$$(\nabla f)_{\mathcal{T}^0} \cdot N = (\nabla f)_{\mathcal{T}^1} \cdot N,$$

où N est la normale à la surface S .

↪ cette condition revient à imposer une continuité du gradient suivant la normale à la surface S .

Résolution du système

On obtient un système linéaire :

$$A \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ \dots \\ f_{N_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_{N_2} \end{bmatrix},$$

où la matrice A n'est pas une matrice carrée car on n'a pas le même nombre d'inconnues que d'équations.

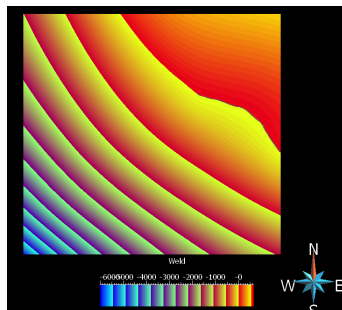
On choisit la solution au sens des moindres carrés, c'est-à-dire celle qui minimise l'erreur L^2 entre les valeurs données et la solution.

Difficultés liées à la courbure

On initialise avec les données suivantes :



Les isolignes sont concaves alors qu'on aimerait avoir quelque chose de convexe.



Besoin d'ajouter d'autres critères de décisions.

Approche Physique : une classification géologique

L'article de Hjelle and al. (2011) élabore un modèle physique qui explique les cinq types de plissements suivants

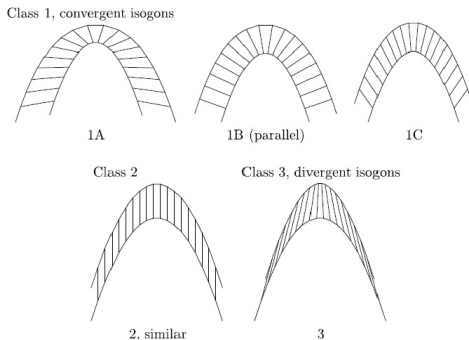


Fig. 1 The five fold classes defined by Ramsay and modeled in the Hamilton-Jacobi framework in Sects. 4.1–4.5. Dip isogons are shown between the two layer boundaries for all fold classes. (Modified from Ramsay (1967, p. 365))

Approche Physique : le modèle

On se donne l'équipotentielle initiale :

$$\Gamma_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad T(\mathbf{x}) = 0\}$$

On cherche à la calculer à l'instant t :

$$\Gamma_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad T(\mathbf{x}) = t\}$$

On rappelle que la normale $\vec{n}$ est donnée par la formule :

$$\vec{n}(\mathbf{x}) = \frac{\vec{\nabla} T(\mathbf{x})}{\|\vec{\nabla} T(\mathbf{x})\|}$$

On cherche une loi d'évolution qui puisse expliquer les différents types de failles observées en géologie :

$$H(t, \mathbf{x}, \vec{\nabla} T(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x}, \vec{n}) \|\vec{\nabla} T(\mathbf{x})\| = 1$$

Approche Physique : méthode des caractéristiques

Le champ de vitesse = propagation + advection :

$$F(\mathbf{x}, \vec{\mathbf{n}}) = F_{\text{prop}}(\mathbf{x}) + \Psi_{\text{adv}}(\mathbf{x})(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{n}})$$

Les caractéristiques permettent de calculer l'évolution de T :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{d\mathbf{x}}{dt} & = \nabla_{\vec{\mathbf{p}}} H & = F_{\text{prop}}(\mathbf{x})\vec{\mathbf{n}} + \Psi_{\text{adv}}(\mathbf{x})\vec{\mathbf{a}} \\ \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} & = -\vec{\nabla}_{\mathbf{x}} H & = -\vec{\nabla} F_{\text{prop}}(\mathbf{x})\|\vec{\mathbf{p}}\| - \vec{\nabla} \Psi_{\text{adv}}(\mathbf{x})(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{p}}) \\ \frac{dT}{dt} & = \vec{\mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} & = F_{\text{prop}}(\mathbf{x})\|\vec{\mathbf{p}}\| + \Psi_{\text{adv}}(\mathbf{x})(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{p}}) \end{array} \right.$$

Approche Physique : retour à la réalité

Caractérisation des types de plissements selon le signe de la vitesse de propagation normale F_{prop} et de la vitesse d'advection Ψ_{adv}

Classe de Plissement	F_{prop}	Ψ_{adv}
Classe 1A	> 0	< 0
Classe 1B	> 0	0
Classe 1C	> 0	> 0
Classe 2	0	> 0
Classe 3	< 0	> 0

Philosophie de la chose

- Utiliser un modèle physique pour simuler le sous-sol : les équations de Hamilton-Jacobi.
- Incorporer de manière pertinente les données géologiques dans la loi d'évolution.
- Résoudre numériquement le système obtenu de façon efficace.

Avantages et inconvénients de la méthode

- Séparation des compétences : expertise du géologue dans la détermination de la loi d'évolution, savoir-faire de l'ingénieur dans la résolution numérique.
- Chaque étape est un problème difficile en soi, et lorsque les données tridimensionnelles sont nombreuses, la complexité augmente d'autant plus.
- La loi d'évolution respecte une physique de propagation qui dépend uniquement des données disponibles.

Choix de la loi d'évolution : le cadre théorique

On se place dans le cadre des méthodes level-set. La surface est représentée par les points d'annulation d'une fonction Ψ :

$$\Gamma_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \Psi(\mathbf{x}, t) = 0\}$$

On suppose connu Γ_0 et on cherche à calculer Γ_t dont l'évolution est soumis aux équations d'Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + H(t, \mathbf{x}, \vec{\nabla} \Psi) = 0$$

où H est une fonction qu'on suppose connue mais qui va devoir être ici inférée à partir des données géologiques disponibles.

Remarques C'est une équation hyperbolique (ondes, vagues). Mais si H dépend de la courbure $\kappa = \operatorname{div} \vec{n} = \operatorname{div}(\frac{\vec{\nabla} \Psi}{\|\vec{\nabla} \Psi\|})$, alors l'équation devient parabolique (chaleur).

Choix de la loi d'évolution : une forme particulière

On suppose que l'application Ψ peut se mettre sous la forme d'une équipotentielle :

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) - t \implies \begin{cases} \partial_t \Psi = -1 \\ \vec{\nabla} \Psi = \vec{\nabla} \varphi \end{cases} \implies H(t, \mathbf{x}, \vec{\nabla} \varphi) = 1$$

On décide de choisir H sous la forme :

$$H(t, \mathbf{x}, \vec{\nabla} \varphi) = \mu(t, \mathbf{x}, \vec{n}) \left(\lambda_0(\mathbf{x}) \|\vec{\nabla} \varphi\| + \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{x}) \vec{\mathbf{a}}_i \cdot \vec{\nabla} \varphi \right).$$

où $(\vec{\mathbf{a}}_i)_{i=1\dots I}$ désigne les vecteurs dont on dispose dans le sous-sol aux points $\mathbf{x}_i$. Les fonctions λ_i et μ vont maintenant être explicitées.

Problèmes numériques

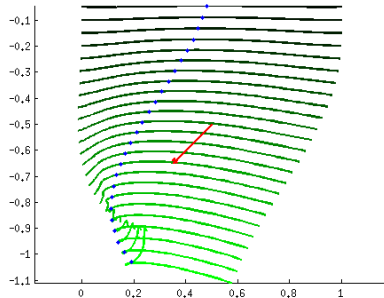
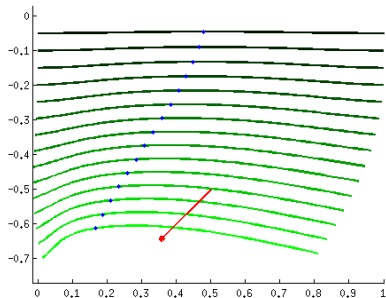
- Problèmes de bords (région vide, faille)
- Problème de maillage (concentration des points, croisements, régularité)
- Problème d'interpolation (calculer des gradients au voisinage d'un point)
- Problème de stabilité (erreurs numériques, pas d'espace)

Algorithme utilisé

- On discrétise l'interface φ_I en des points $\mathbf{X}_I = (X_I, Y_I)$ pour $I = 1 \dots L$
- Chaque point va être glissé suivant la direction et l'intensité données par la résolution du système d'équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_I^{n+1} = \mathbf{X}_I^n + \mu_I^n \Delta t \left(\lambda_0^I \vec{\mathbf{n}}_I + \sum_{i=1}^I \lambda_i^I \vec{\mathbf{a}}_i \right) \\ \vec{\mathbf{p}}_I^{n+1} = \vec{\mathbf{p}}_I^n - \Delta t \vec{\nabla} \mu_I^n \left(\lambda_0^I \|\vec{\mathbf{p}}_I^n\| + \sum_{i=1}^I \lambda_i^I \vec{\mathbf{a}}_i \cdot \vec{\mathbf{p}}_I^n \right) \\ \quad - \mu_I^n \Delta t \left(\vec{\nabla} \lambda_0^I \|\vec{\mathbf{p}}_I^n\| + \sum_{i=1}^I \vec{\nabla} \lambda_i^I \vec{\mathbf{a}}_i \cdot \vec{\mathbf{p}}_I^n \right) \end{array} \right.$$

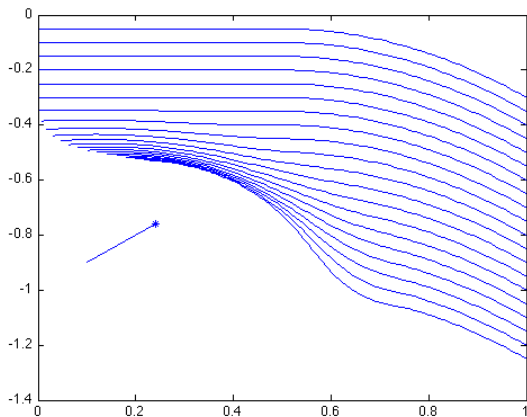
Résultats numériques : le cas d'un vecteur imposé



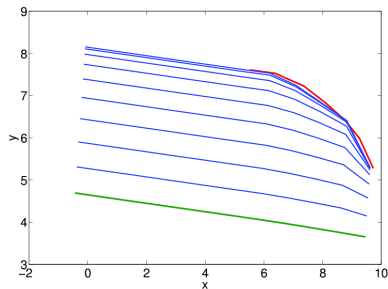
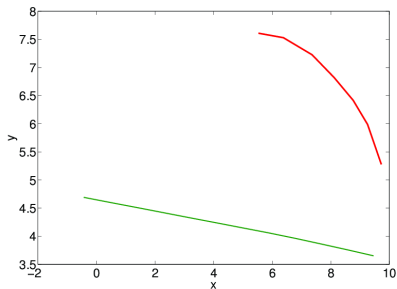
Résultats numériques : le cas d'un vecteur imposé

On part d'une courbe concave et on impose un gradient égal à $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ en $(0.1; -0.9)$.

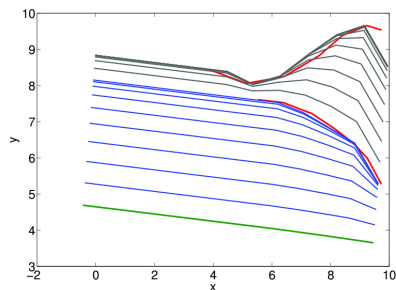
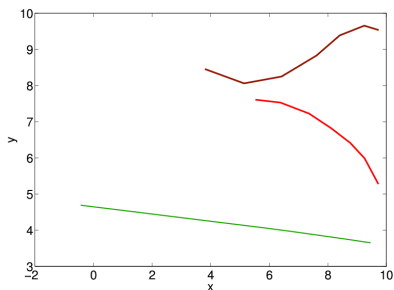
Le rayon d'influence pour le gradient est égal à 0.6.



Résultats numériques : le cas de points imposés



Résultats numériques : le cas de deux couches imposées



Autre piste : résolution par problème inverse

- problème direct : $\lambda_0(x), \lambda_i(x) \rightsquigarrow \varphi(x)$
- problème inverse : $\varphi(x_i), i = 1, \dots, M \rightsquigarrow \lambda_0(x), \lambda_i(x)$
- Résolution du problème inverse basée sur la minimisation d'une fonction coût :

$$J(\lambda_0, \lambda_i) = \|\varphi(\lambda_0, \lambda_i) - d\|.$$

où d est le vecteur contenant les données.

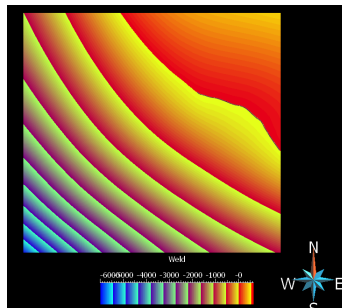
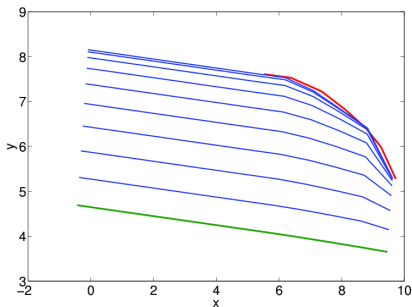
- Algorithme du gradient conjugué :

$$(\lambda_0, \lambda_i)^{(k+1)} = (\lambda_0, \lambda_i)^{(k-1)} + \alpha^{(k)} \vec{D}^{(k)}$$

- Difficultés :
 - Résolution du direct.
 - Problème inverse bien posé ?
 - Algorithmes de minimisation ?

Conclusion

- Le modèle considéré modélise bien la surposition des couches.
- Les premiers résultats numériques sont encourageants.



Perspectives

- Autres méthodes de discrétisation : ordre du schéma en temps, schéma implicite, volumes finis,...
- Lissage et interpolation des paramètres d'advection.
- Interpolation de Γ_t .
- Considération des failles.
- Implémentations de modèles 3D.
- Résolution du problème inverse.

Merci pour votre attention.