Analyse en discret du problème bas Mach avec porosité : les cas cartésien et triangulaire

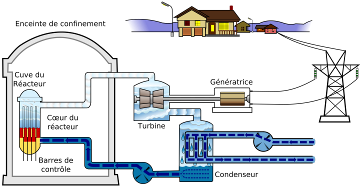
Jonathan Jung (LRC-Manon, Paris 6)

Collaborateurs :
Stéphane Dellacherie (CEA, Saclay & LRC-Manon)
Pascal Omnes (CEA, Saclay & Université Paris 13)

LRC Manon, 7 octobre 2014

Cas d'étude :

- Cœur de réacteur nucléaire.



Propriétés de l'écoulement :

- Écoulement en section variable.
- Écoulement compressible.
- Bas nombre de Mach

$$|u| \ll c$$
$$\Leftrightarrow M := \frac{|u|}{c} \ll 1.$$

Objectif :

- Développer un schéma numérique "compressible" se comportant bien à bas nombre de Mach.

Équation d'Euler barotrope

- Équations d'Euler barotrope avec porosité

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha\rho) + \nabla\cdot(\alpha\rho\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\alpha\rho\mathbf{u}) + \nabla\cdot(\alpha\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \alpha\nabla p = 0, \end{cases}$$

où $\alpha \in [\alpha_{\min}, 1]$ est la porosité, où $\alpha_{\min} > 0$.

- Adimensionnement : on introduit $\tilde{x} = \frac{x}{L}$, $\tilde{y} = \frac{y}{L}$, $\tilde{t} = \frac{t}{T}$, $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_0}$, $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$, $\tilde{u_x} = \frac{u_x}{u_0}$, $\tilde{u_y} = \frac{u_y}{u_0}$, $\tilde{p} = \frac{p}{p_0}$ avec $u_0 = \frac{L}{T}$, on obtient

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\alpha}\tilde{\rho}) + \tilde{\nabla}\cdot(\tilde{\alpha}\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}) = 0, \\ \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\alpha}\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\nabla}\cdot(\tilde{\alpha}\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}\otimes\tilde{\mathbf{u}}) + \dfrac{\tilde{\alpha}}{M^2}\nabla\tilde{p} = 0, \end{cases} \quad \text{avec } M = \frac{u_0}{c_0}.$$

- Changement de variables $\tilde{\rho} := \tilde{\rho}_\star\left(1 + \frac{M}{a_\star}\tilde{r}\right)$, avec $\begin{cases} a_\star^2 = \tilde{p}'(\tilde{\rho}_\star) \\ \frac{M}{a_\star}\tilde{r} \ll 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} \partial_t(\tilde{\alpha}\tilde{r}) + \tilde{\nabla}\cdot(\tilde{\alpha}\tilde{r}\tilde{\mathbf{u}}) + \frac{a_\star}{M}\tilde{\nabla}\cdot(\tilde{\alpha}\tilde{\mathbf{u}}) = 0, \\ \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\alpha}\tilde{\mathbf{u}}) + (\tilde{\mathbf{u}}\cdot\tilde{\nabla})(\tilde{\alpha}\tilde{\mathbf{u}}) + \frac{\tilde{\alpha}}{M}\frac{\tilde{p}'\left(\tilde{\rho}_\star\left(1+\frac{M}{a_\star}\tilde{r}\right)\right)}{a_\star\left(1+\frac{M}{a_\star}\tilde{r}\right)}\nabla\tilde{r} = 0. \end{cases}$$

Équation des ondes avec porosité

- Linéarisation autour de $(\tilde{r} = 0, \tilde{\mathbf{u}} = 0)$: **équation des ondes avec porosité**

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha r) + \frac{a_\star}{M} \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\alpha \mathbf{u}) + \frac{a_\star}{M} \alpha \nabla r = 0. \end{cases}$$

- Noyau de l'opérateur spatial : **espace incompressible**

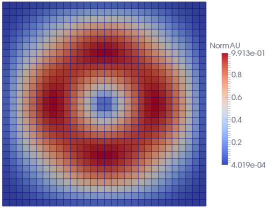
$$\mathcal{E}_\alpha := \left\{ q = (r, \mathbf{u})^T \in L^2_\alpha(\mathbb{T})^3 \,\middle|\, \nabla r = 0 \text{ et } \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0 \right\}.$$

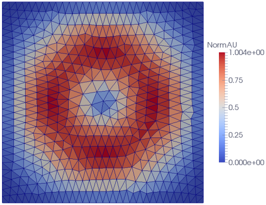
But :

- Étudier le comportement du schéma numérique vis-à-vis des éléments incompressibles $q \in \mathcal{E}_\alpha$.

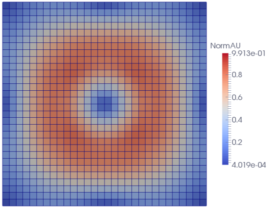
Problème numérique : condition initiale incompressible $q_0 \in \mathcal{E}_\alpha$

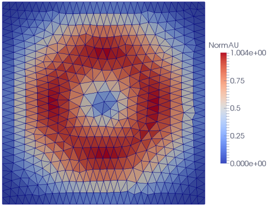
- Condition initiale :





- À $t = 0.01 (= M)$:





Ojectifs :

- Cerner l'origine du problème sur maillage cartésien.
- Comprendre le cas triangulaire.

Schéma numérique

Schéma de Godunov sur maillage triangulaire ou cartésien $(\Omega_i)_{1\le i\le N}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\alpha r)_i + \frac{a_\star}{2M}\frac{1}{|\Omega_i|}\sum_{\Gamma_{ij}\subset\partial\Omega_i} |\Gamma_{ij}|\left(\alpha\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)_{ij} = 0, \\ \frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{u})_i + \frac{a_\star}{2M}\frac{\alpha_i}{|\Omega_i|}\sum_{\Gamma_{ij}\subset\partial\Omega_i} |\Gamma_{ij}| r_{ij}\mathbf{n}_{ij} = 0, \end{cases}$$

où $\left(r_{ij}, (\alpha\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})_{ij}\right)$ est solution d'un problème du Riemann [1] $1D$ dans la direction $\mathbf{n}_{ij}$ en $\xi = 0$

$$\begin{cases} \alpha_{ij}\partial_t r_\xi + \frac{a_\star}{M}\partial_\xi\left((\alpha u)_\xi\right) = 0, \\ \partial_t\left((\alpha u)_\xi\right) + \frac{a_\star}{M}\alpha_{ij}\partial_\xi r_\xi = 0, \\ \left(r_\xi, (\alpha u)_\xi\right)(t=0,\xi) = \begin{cases} \left(r_i, (\alpha\mathbf{u})_i\cdot\mathbf{n}_{ij}\right) & \text{si } \xi < 0, \\ \left(r_j, (\alpha\mathbf{u})_j\cdot\mathbf{n}_{ij}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

1. S. Dellacherie, P. Omnes, On the Godunov scheme applied to the variable cross-section linear equation. FVCA6, (4) :313–321, 2011.

Schéma numérique

- La solution du problème de Riemann en $\xi = 0$ est donnée par

$$\begin{cases} r_{ij} = \dfrac{r_i + r_j}{2} + \dfrac{1}{2\alpha_{ij}}\big((\alpha\mathbf{u})_i - (\alpha\mathbf{u})_j\big)\cdot\mathbf{n}_{ij}, \\ \big((\alpha\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\big)_{ij} = \dfrac{\big((\alpha\mathbf{u})_i + (\alpha\mathbf{u})_j\big)\cdot\mathbf{n}_{ij}}{2} + \dfrac{\alpha_{ij}}{2}(r_i - r_j). \end{cases}$$

- Schéma de Godunov sur maillage triangulaire ou cartésien $(\Omega_i)_{1\leq i\leq N}$ [DO11]

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\alpha r)_i + \dfrac{a_\star}{2M}\dfrac{1}{|\Omega_i|}\displaystyle\sum_{\Gamma_{ij}\subset\partial\Omega_i}|\Gamma_{ij}|\Big[\big((\alpha\mathbf{u})_i + (\alpha\mathbf{u})_j\big)\cdot\mathbf{n}_{ij} + \alpha_{ij}(r_i - r_j)\Big] = 0, \\ \dfrac{d}{dt}(\alpha\mathbf{u})_i + \dfrac{a_\star}{2M}\dfrac{\alpha_i}{|\Omega_i|}\displaystyle\sum_{\Gamma_{ij}\subset\partial\Omega_i}|\Gamma_{ij}|\Big[r_i + r_j + \dfrac{\kappa}{\alpha_{ij}}\big((\alpha\mathbf{u})_i - (\alpha\mathbf{u})_j\big)\cdot\mathbf{n}_{ij}\Big]\mathbf{n}_{ij} = 0 \end{cases}$$

avec $\kappa = 1$.

Cerner l'origine du problème en cartésien

Équation équivalente en cartésien :

- Le schéma de Godunov sur maillage cartésien $\Omega_{i,j}$ pour αr nous fournit

$$\begin{aligned}\partial_t(\alpha r)_{i,j} &+ \frac{a_\star}{M}\frac{(\alpha u_x)_{i+1,j}-(\alpha u_x)_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{a_\star}{M}\frac{(\alpha u_y)_{i,j+1}-(\alpha u_y)_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ &= \frac{a_\star}{2M\Delta x}\left(\alpha_{i+\frac{1}{2},j}\left(r_{i+1,j}-r_{i,j}\right)-\alpha_{i-\frac{1}{2},j}\left(r_{i,j}-r_{i-1,j}\right)\right) \\ &\quad + \frac{a_\star}{2M\Delta y}\left(\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}\left(r_{i,j+1}-r_{i,j}\right)-\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}\left(r_{i,j}-r_{i,j-1}\right)\right).\end{aligned}$$

- L'équation équivalente à l'ordre un pour αr est donc

$$\partial_t(\alpha r)+\frac{a_\star}{M}\nabla\cdot(\alpha\mathbf{u}) = \frac{a_\star\Delta x}{2M}\partial_x(\alpha\partial_x r)+\frac{a_\star\Delta y}{2M}\partial_y(\alpha\partial_y r).$$

Équation équivalente en cartésien

- Nous faisons de même pour l'équation sur $\alpha\mathbf{u}$ et nous obtenons le système équivalent

$$\partial_t(\alpha r) + \frac{a_\star}{M}\nabla\cdot(\alpha\mathbf{u}) - \frac{a_\star\Delta x}{2M}\partial_x(\alpha\partial_x r) - \frac{a_\star\Delta y}{2M}\partial_y(\alpha\partial_y r) = 0$$

$$\partial_t(\alpha\mathbf{u}) + \frac{a_\star}{M}\alpha\nabla r - \begin{pmatrix} \kappa\alpha\frac{a_\star\Delta x}{2M}\partial_x\left(\frac{1}{\alpha}\partial_x(\alpha u_x)\right) \\ \kappa\alpha\frac{a_\star\Delta y}{2M}\partial_y\left(\frac{1}{\alpha}\partial_y(\alpha u_y)\right) \end{pmatrix} = 0$$

avec $\kappa = 1$. Nous l'écrivons sous la forme

$$\partial_t(\alpha q) + \frac{\mathcal{L}_{\kappa,\alpha}}{M}(q) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_{\kappa,\alpha} = L_\alpha - MB_{\kappa,\alpha}.$$

- **Quelle est la relation entre Ker $\mathcal{L}_{\kappa,\alpha}$ et $\mathcal{E}_\alpha$?**

Noyau de l'équation équivalente

Proposition

1. *Si* $\kappa > 0$, *nous avons*

$$\begin{aligned} Ker\,\mathcal{L}_{\kappa>0,\alpha} = &\left\{q := (r, \boldsymbol{u})^T | \nabla r = 0 \ et\ \partial_x(\alpha u_x) = \partial_y(\alpha u_y) = 0\right\} \\ &\subsetneq \mathcal{E}_\alpha. \end{aligned}$$

2. *Si* $\kappa = 0$, *nous avons* $Ker\,\mathcal{L}_{\kappa=0,\alpha} = \mathcal{E}_\alpha$.

Bilan de l'étude en continue :

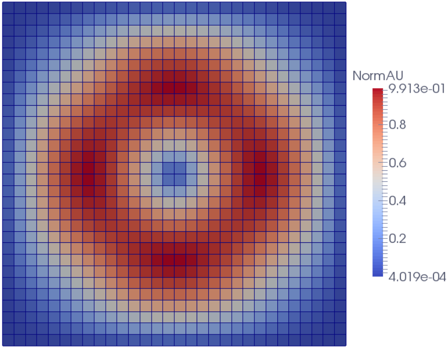
- Remplacer $\kappa = 1$ par $\kappa = 0$ semble permettre au schéma de Godunov de préserver les états incompressibles $q^0 \in \mathcal{E}_\alpha$ sur maillages cartésiens.

À faire :

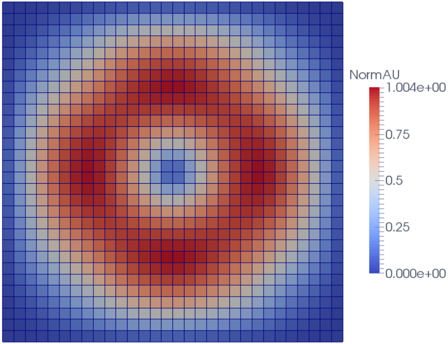
- Tester numériquement la correction ($\kappa = 0$).

Test de la correction bas Mach $\kappa = 0$

- Condition initiale $q^0 \in \mathcal{E}_\alpha$:



- À $t = 0.01 (= M)$:



Objectifs :

- Étudier le problème au niveau discret.
- Étudier le cas d'un maillage triangulaire.

Étude discrète

- Nous définissons les espaces $\mathcal{E}_\alpha^{\triangle}$ et $\mathcal{E}_\alpha^{\square}$ correspondant à l'espace incompressible $\mathcal{E}_\alpha$ sur maillages triangulaires et cartésiens.
- Rappelons le schéma de Godunov sur maillage triangulaire ou cartésien $(\Omega_i)_{1\leq i\leq N}$ [DO11]

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\alpha r)_i + \dfrac{a_\star}{2M}\dfrac{1}{|\Omega_i|}\displaystyle\sum_{\Gamma_{ij}\subset\partial\Omega_i}|\Gamma_{ij}|\Big[\big((\alpha\mathbf{u})_i + (\alpha\mathbf{u})_j\big)\cdot\mathbf{n}_{ij} + \alpha_{ij}(r_i - r_j)\Big] = 0, \\ \dfrac{d}{dt}(\alpha\mathbf{u})_i + \dfrac{a_\star}{2M}\dfrac{\alpha_i}{|\Omega_i|}\displaystyle\sum_{\Gamma_{ij}\subset\partial\Omega_i}|\Gamma_{ij}|\Big[r_i + r_j + \dfrac{\kappa}{\alpha_{ij}}\big((\alpha\mathbf{u})_i - (\alpha\mathbf{u})_j\big)\cdot\mathbf{n}_{ij}\Big]\mathbf{n}_{ij} = 0 \end{cases}$$

avec $\kappa = 1$.

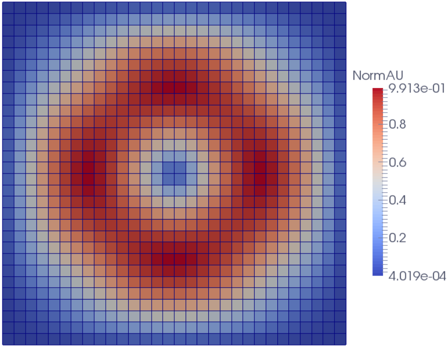
- Nous l'écrivons sous la forme

$$\frac{d}{dt}(\alpha q_h) + \frac{\mathbb{L}^h_{\kappa,\alpha}}{M}(q_h) = 0,$$

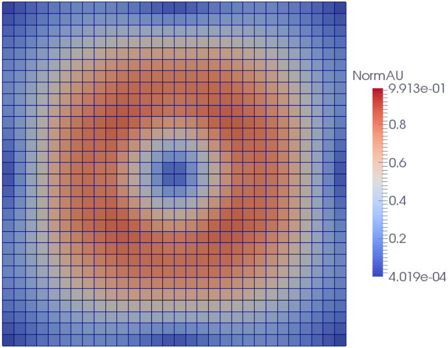
où $q_h = (r_i, \mathbf{u}_i)^T$.

Maillage cartésien et schéma de Godunov $(\kappa = 1)$:

- Condition initiale $q^0 \in \mathcal{E}_\alpha^\square$:



- À $t = 0.01 (= M)$:

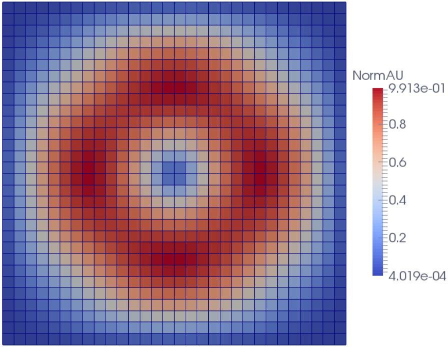


Proposition ($\kappa = 1$ sur $\square$)

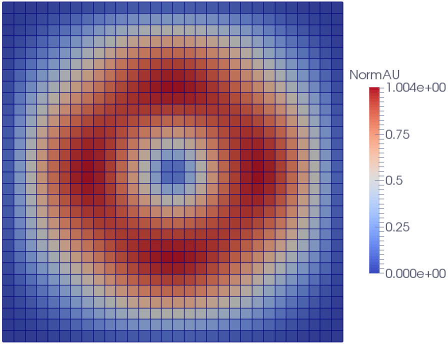
$$Ker\,\mathbb{L}_{\kappa=1,\alpha}^h \subsetneq \mathcal{E}_\alpha^\square.$$

Maillage cartésien et schéma bas Mach $(\kappa = 0)$:

- Condition initiale $q^0 \in \mathcal{E}_\alpha^\square$:



- À $t = 0.01 (= M)$:

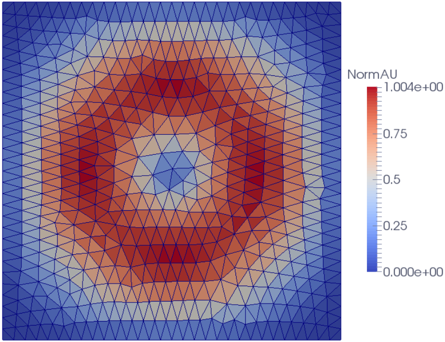


Proposition $(\kappa = 0 \text{ sur } \square)$

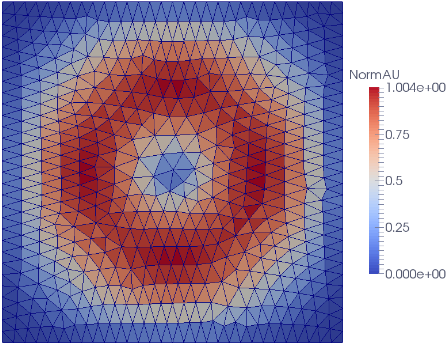
$$Ker\, \mathbb{L}^h_{\kappa=0,\alpha} = \mathcal{E}_\alpha^\square .$$

Maillage triangulaire et schéma de Godunov $(\kappa = 1)$:

- Condition initiale $q^0 \in \mathcal{E}_\alpha^\triangle$:



- À $t = 0.01 (= M)$:



Proposition ($\kappa = 1$ sur $\triangle$)

$$Ker\, \mathbb{L}^h_{\kappa=1,\alpha} = \mathcal{E}_\alpha^\triangle .$$

Conclusion sur l'étude discrète du noyau associé au schéma de Godunov

Conclusion :

- Le schéma de Godunov ($\kappa = 1$) ne préserve pas certains états de l'espace incompressible $\mathcal{E}_\alpha^\square$ sur maillage cartésien.
- Le schéma bas Mach ($\kappa = 0$) préserve les éléments de l'espace incompressible $\mathcal{E}_\alpha^\square$ sur maillage cartésien.
- Le schéma de Godunov ($\kappa = 1$) préserve les états de l'espace incompressible $\mathcal{E}_\alpha^\triangle$ sur maillage triangulaire.

MAIS :

- On souhaite une correction permettant d'obtenir le schéma de Godunov quand le nombre de Mach tend vers 1.
- Que se passe-t-il si la condition initiale $q^0 \notin \mathcal{E}_\alpha$?
- L'étude du noyau $\mathcal{E}_\alpha$ ne suffit pas.

Décomposition de Hodge et projection sur $\mathcal{E}_\alpha$

Comment pouvons-nous décomposer un élément $q \notin \mathcal{E}_\alpha$?

Théorème

Supposons que $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ avec $\alpha_{\min} > 0$. Il est possible de construire une décomposition de Hodge sur les espaces à poids

$$\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\alpha^\perp = L^2_\alpha(\mathbb{T})^3,$$

*où l'**espace acoustique** $\mathcal{E}_\alpha^\perp$ est donné par*

$$\mathcal{E}_\alpha^\perp = \left\{ q = (r, \boldsymbol{u})^T \in L^2_\alpha(\mathbb{T})^3 \,\middle|\, \int_{\mathbb{T}} r\alpha dx = 0 \text{ et } \exists \phi \in H^1_\alpha(\mathbb{T}), \boldsymbol{u} = \nabla\phi \right\}$$

Définition

*La décomposition de Hodge permet de définir une **projection orthogonale***

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\alpha :\ L^2_\alpha(\mathbb{T})^3 &\longrightarrow \mathcal{E}_\alpha \\ q &\longmapsto \mathbb{P}_\alpha q. \end{aligned}$$

Structure de la solution de l'équation des ondes

Équation des ondes avec porosité

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha r) + \frac{a_\star}{M}\nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\alpha \mathbf{u}) + \frac{a_\star}{M}\alpha \nabla r = 0. \end{cases}$$

Proposition

Si q est solution de l'équation des ondes avec porosité et si q a pour condition initiale q^0, nous avons

$$\forall q^0 \in \mathcal{E}_\alpha, \quad q(t \geq 0) = q^0 \in \mathcal{E}_\alpha \quad \textit{et} \quad \forall q^0 \in \mathcal{E}_\alpha^\perp, \quad q(t \geq 0) \in \mathcal{E}_\alpha^\perp.$$

Corollaire

La solution q de l'équation des ondes avec porosité ayant pour condition initiale q^0 peut s'écrire sous la forme

$$q = \mathbb{P}_\alpha q^0 + \left(q - \mathbb{P}_\alpha q^0\right) \in \mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E}_\alpha^\perp.$$

Structure de la solution de l'équation des ondes

Équation des ondes avec porosité

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha r) + \frac{a_\star}{M} \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\alpha \mathbf{u}) + \frac{a_\star}{M} \alpha \nabla r = 0. \end{cases}$$

Proposition

L'énergie de la solution q de l'équation des ondes avec porosité satisfait

$$\frac{d}{dt} \|q\|^2_{L^2_\alpha} = 0.$$

Corollaire

La solution q de l'équation des ondes avec porosité ayant pour condition initiale q^0 satisfait

$$\forall C > 0, \ \|q^0 - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L^2_\alpha} \leq CM \Rightarrow \forall t \geq 0, \ \|q - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L^2_\alpha}(t) \leq CM.$$

Schéma numérique précis à bas nombre de Mach

- Nous transcrivons cette propriété au niveau discret en temps court.
- Nous construisons les décompositions de Hodge sur maillages triangulaires et cartésiens.
- Nous obtenons des projection orthogonales discrètes $\mathbb{P}_\alpha^h$ sur $\mathcal{E}_\alpha^\square$ et $\mathcal{E}_\alpha^\triangle$.

Définition

*Un schéma est **précis à bas Mach** si la solution q_h donnée par le schéma satisfait*

$$\forall C_1, C_2 > 0,\ \exists C_3(C_1, C_2) > 0,\ \|q_h^0 - \mathbb{P}_\alpha^h q_h^0\|_{l^2_\alpha} = C_1 M$$
$$\Rightarrow \forall t \in [0; C_2 M],\ \|q_h - \mathbb{P}_\alpha^h q_h^0\|_{l^2_\alpha}(t) \leq C_3 M,$$

où C_3 ne dépend pas de M.

Condition initiale :

- $a_\star = 1$.
- $M = 10^{-4}$.
- $q_h^0 = q_{h,1}^0 + \mathbf{M} q_{h,2}^0$ avec

$$\begin{cases} r_{h,1}^0(x,y) = 1, \\ (\alpha \mathbf{u}_1)_h^0 = \nabla_h \times \psi_h, \end{cases} \Rightarrow q_{h,1}^0 \in \mathcal{E}_\alpha^h$$

  et

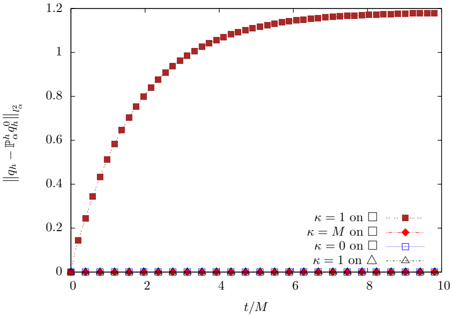
$$\begin{cases} r_{h,2}^0(x,y) = 0, \\ \mathbf{u}_{h,2}^0 = \nabla_h \phi_h, \\ \|q_{h,2}^0\|_{l^2_\alpha} = 1, \end{cases} \Rightarrow q_{h,2}^0 \in \left(\mathcal{E}_\alpha^h\right)^\perp$$

  alors

$$\|q_h^0 - \mathbb{P}_\alpha q_h^0\|_{l^2_\alpha} = \|M q_{h,2}^0\|_{l^2_\alpha} = M = O(M).$$

- Nous traçons $\|q_h - \mathbb{P}_\alpha q_h^0\|_{l^2_\alpha}(t)$ comme une fonction du temps.

Maillage cartésien avec $\Delta x = \Delta y = 0.02$ et $M = 0.0001 \ll \Delta x$:

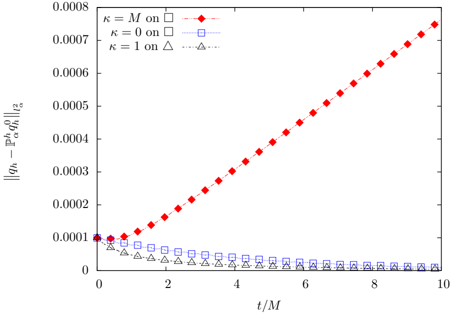


Théorème ($\kappa = 1$ sur $\square$)

$$\forall C_1 > 0,\ \exists C_2(C_1) > 0,\ \exists C_3(C_1) > 0,\ \|q_h^0 - \mathbb{P}_\alpha^{h,\square} q_h^0\|_{l^2_\alpha} = C_1 M$$
$$\Rightarrow \forall t \geq C_2 M,\ \|q_h - \mathbb{P}_\alpha^{h,\square} q_h^0\|_{l^2_\alpha}(t) \geq C_3 \min(\Delta x, \Delta y),$$

pour tout $M \leq \frac{C_3}{C_1} \min(\Delta x, \Delta y)$.

Maillage cartésien avec $\Delta x = \Delta y = 0.02$ et $M = 0.0001 \ll \Delta x$:

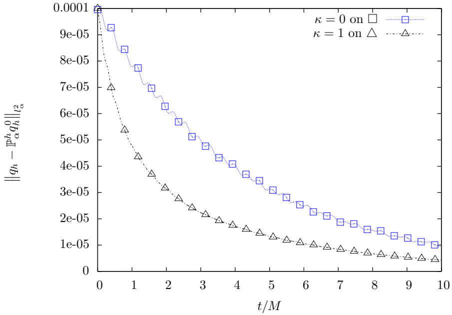


Théorème ($\kappa = M$ sur $\square$)

$$\forall C_1, C_2 > 0,\ \exists C_3(C_1, C_2) > 0,\ \|q^0_h - \mathbb{P}^{h,\square}_\alpha q^0_h\|_{l^2_\alpha} = C_1 M$$
$$\Rightarrow \forall t \in [0; C_2 M],\ \|q_h - \mathbb{P}^{h,\square}_\alpha q^0_h\|_{l^2_\alpha}(t) \leq C_3 M,$$

où C_3 ne dépend pas de M.

Maillage cartésien avec $\Delta x = \Delta y = 0.02$ et $M = 0.0001 \ll \Delta x$:

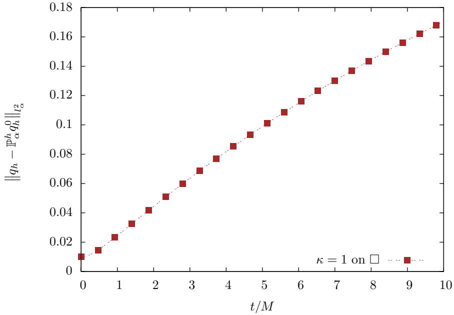


Théorème ($\kappa = 1$ sur $\triangle$ et $\kappa = 0$ sur $\Box$)

$$\forall C_1, C_2 > 0,\ \exists C_3(C_1, C_2) > 0,\ \|q_h^0 - \mathbb{P}_\alpha^h q_h^0\|_{l^2_\alpha} = C_1 M \Rightarrow \forall t \geq 0,\ \|q_h - \mathbb{P}_\alpha^h q_h^0\|_{l^2_\alpha}(t) \leq C_3 M,$$

où C_3 ne dépend pas de M.

Maillage cartésien avec $\Delta x = \Delta y = 0.0033$ et $M = 0.01 \gg \Delta x$:



Théorème ($\kappa = 1$ sur $\square$)

$$\forall C_0, C_1, C_2 > 0, \exists C_3(C_0, C_1, C_2) > 0, \begin{cases} \Delta x \leq C_0 M, \ \textit{et} \ \ \Delta y \leq C_0 M, \\ \left\| q_h^0 - \mathbb{P}^h_\alpha q^0_h \right\|_{l^2_\alpha} = C_1 M \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0; C_2 M], \ \left\| q_h - \mathbb{P}^h_\alpha q^0_h \right\|_{l^2_\alpha} (t) \leq C_3 M,$$

où C_3 ne dépend pas de M, Δx et Δy.

Conclusion du cas linéaire

Maillage triangulaire :

- Le schéma de Godunov ($\kappa = 1$) est précis à bas nombre de Mach.

Maillage cartésien :

- Le schéma de Godunov ($\kappa = 1$) n'est pas précis à bas nombre de Mach si $M \ll \min(\Delta x, \Delta y)$ mais est précis si $M \gg \min(\Delta x, \Delta y)$.
- Deux corrections à bas nombre de Mach :

$$F^{Cor}(W_i, W_j) = F^{God}(W_i, W_j) - \frac{(1-\kappa)a_\star \alpha_i}{2M\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 0 \\ \left[\left((\alpha \mathbf{u})_i - (\alpha \mathbf{u})_j\right) \cdot \mathbf{n}_{ij}\right] \mathbf{n}_{ij} \end{pmatrix}$$

- $\underline{\kappa = 0 \text{ (correction } \textbf{bas Mach}\text{)}}$: précis à bas Mach,
- $\underline{\kappa = \min(M, 1) \text{ (correction } \textbf{tout Mach}\text{)}}$: précis à bas Mach et permet de retrouver le schéma de Godunov pour $M \geq 1$.

Prochaine étape :

- Tester les différents schéma dans le cas non-linéaire.

Correction bas Mach en non-linéaire avec $\alpha = 1$

Équations d'Euler barotrope :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0. \end{cases}$$

Nous notons $W = (\alpha\rho, \alpha\rho\mathbf{u})^T$. Le schéma numérique s'écrit sous la forme

$$\frac{d}{dt} W_i + \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{\Gamma_{ij} \subset \partial\Omega_i} |\Gamma_{ij}| F(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij}) = 0.$$

Les corrections **bas Mach** et **tout Mach** consiste à remplacer le flux $F(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij})$ par

$$F^{Cor}(W_i, W_j) = F^{Roe}(W_i, W_j) - \frac{(1-\kappa_{ij})\rho_{ij} c_{ij}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \left[(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij}\right] \mathbf{n}_{ij} \end{pmatrix}$$

en prenant respectivement $\kappa_{ij} = 0$ ou $\kappa_{ij} = \min\left(1, \frac{|u_{ij}|}{c_{ij}}\right)$.

4 chocs

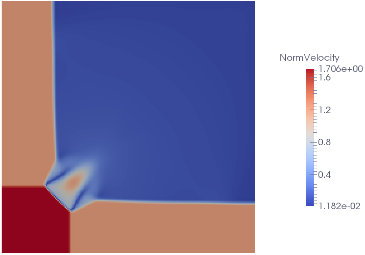
- L'état initial est donné par

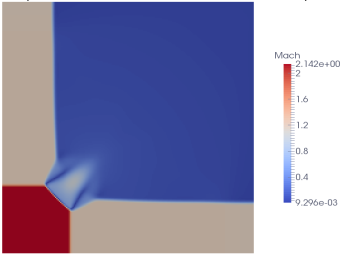
$$(\rho, u_x, u_y)(x,y) = \begin{cases} (0.1380, 1.206, 1.206), & \text{pour } x < 0.5, \quad y < 0.5 \\ (0.5323, 0.000.1.206), & \text{pour } x > 0.5, \quad y < 0.5 \\ (0.5323, 1.206, 0.000), & \text{pour } x < 0.5, \quad y > 0.5 \\ (1.5000, 0.000, 0.000), & \text{pour } x > 0.5, \quad y > 0.5 \end{cases}$$

  sur le domaine $[0,1] \times [0,1]$.
- Conditions aux bords de type Neumann.
- Temps final de calcul : $t_{final} = 0.4s$.
- Outils :
  - Salome pour le maillage,
  - Librairie C++ CDMATH (http://www.cdmath.jimdo.com) pour le code.

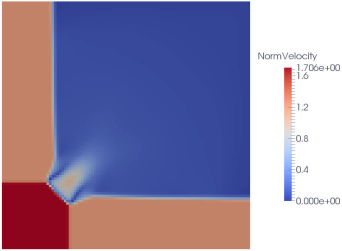
4 chocs :

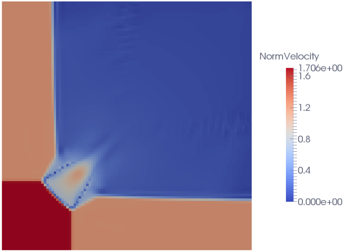
- Solution de référence (Roe $(\kappa_{ij} = 1)$ en cartésien 200×200) :





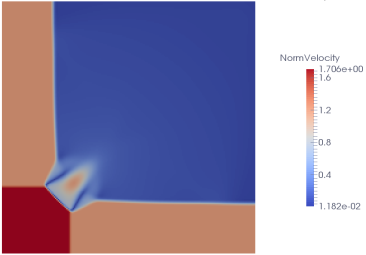
- Roe avec $\kappa_{ij} = 1$ et $\kappa_{ij} = \min\left(1, \frac{|u_{ij}|}{c_{ij}}\right)$ en cartésien 100×100 :

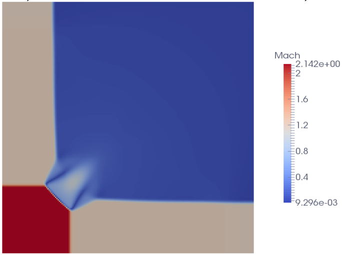




4 chocs :

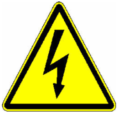
- Solution de référence (Roe ($\kappa_{ij} = 1$) en cartésien 200×200) :

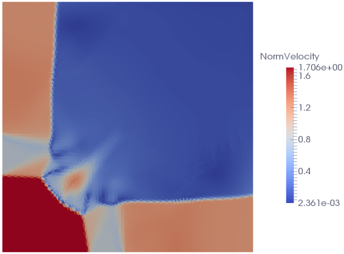




- Roe avec $\kappa_{ij} = 0$ en cartésien et avec $\kappa_{ij} = 1$ en triangulaire :

Le schéma plante avec $\kappa_{ij} = 0$!





Vortex :

- Pour ce test on utilise une loi de gaz parfait.
- L'état initial est donné par

$$\rho = 1, \quad p = 1000$$

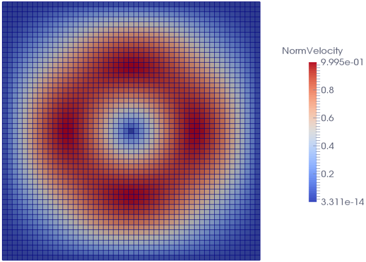
$$\text{et} \quad \alpha \mathbf{u} = \nabla \times \psi \quad \text{avec} \quad \psi(x,y) = \frac{1}{\pi}\sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y)$$

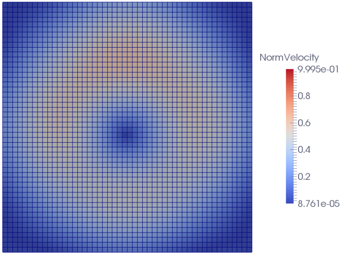
sur le domaine $[0,1] \times [0,1]$.

- Conditions aux bords de type mur.
- Temps final de calcul : $t_{final} = 0.125s$.

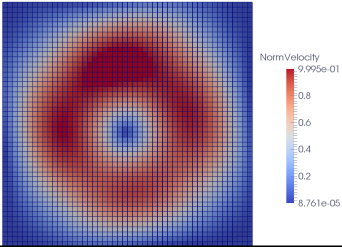
Vortex :

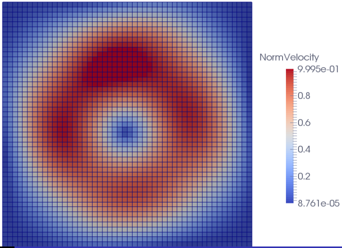
- Instant initial et Roe avec $\kappa_{ij} = 1$ en cartésien 50×50 :





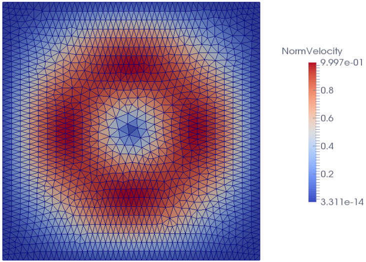
- Roe avec $\kappa_{ij} = 0$ et $\kappa_{ij} = \min\left(1, \dfrac{|u_{ij}|}{c_{ij}}\right)$ en cartésien 50×50 :

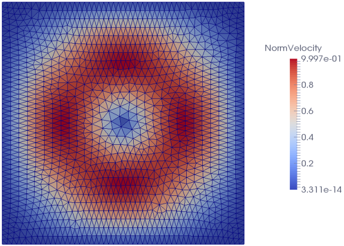




Vortex :

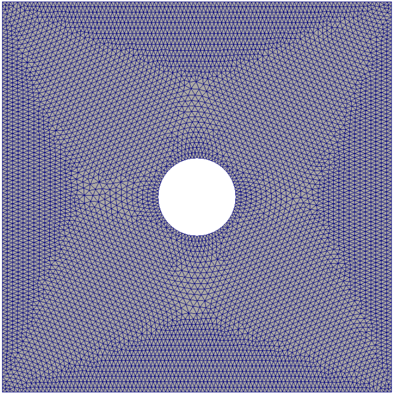
- Instant initial et Roe avec $\kappa_{ij} = 1$ en triangulaire :

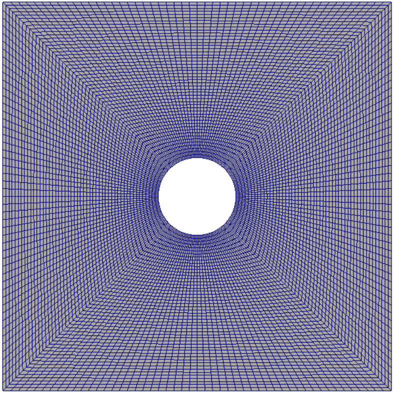




Écoulements autour d'un cylindre

- Un avantage de CDMATH est de pouvoir facilement tester le code sur des géométries plus complexes.





Conclusion finale et perspective

Conclusion :

- Nous avons constaté le bon comportement à bas nombre de Mach des schémas de volumes finis sur maillages triangulaires en linéaire et en non linéaire.
- Nous avons constaté le mauvais comportement à bas nombre de Mach des schémas de volumes finis sur maillages cartésiens en linéaire et en non linéaire.
- L'étude de l'équation linéarisée nous a permis de construire une correction fournissant un schéma précise à bas Mach et permettant de retrouver le schéma de Godunov quand $M \geq 1$ sur maillages cartésiens.

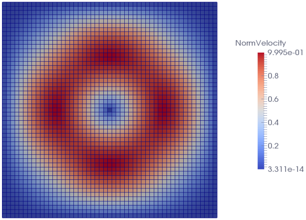
Perpectives :

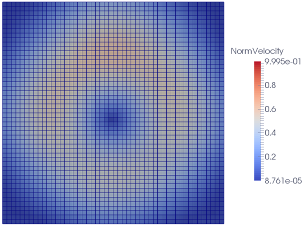
- Tester le schéma avec α non constant dans le cas non-linéaire.
- Étudier la stabilité du schéma numérique corrigé dans le cas non-linéaire.

Articles :

- **Preliminary results for the study of the Godunov scheme applied to the linear wave equation with porosity**, S. Dellacherie, J. Jung, P. Omnes.
- **A low Mach correction for the Godunov scheme applied to the linear wave equation with porosity**, S. Dellacherie, J. Jung, P. Omnes.
- **Construction of Godunov type schemes accurate at any Mach number**, S. Dellacherie, J. Jung, P. Omnes, P.-A. Raviart.

Merci de votre attention !





S. Dellacherie, P. Omnes. On the Godunov scheme applied to the variable cross-section linear equation. FVCA6, (4) :313–321, 2011.