



Sur le schéma de Godunov à bas nombre de Mach pour l'équation des ondes avec taux de vide

Jonathan Jung (LJLL & LRC-Manon, Paris 6)

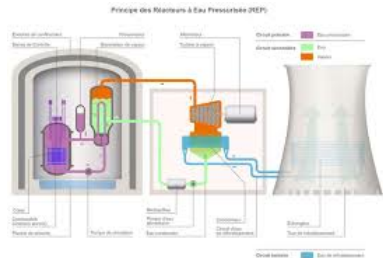
Collaborateurs :

Stéphane Dellacherie (CEA, Saclay & LRC-Manon)

Pascal Omnes (CEA, Saclay & Université Paris 13)

CANUM 2014, 2 avril

Cas d'étude : un cœur de réacteur nucléaire.



Propriétés de l'écoulement :

- écoulement diphasique eau-air,
- l'air est compressible,
- l'écoulement est à faible nombre de Mach

$$u \approx 1.$$

Objectif : développer un schéma numérique précis à tout nombre de Mach permettant de calculer ce type d'écoulement diphasique.

Modèle

- Les équations d'Euler barotrope adimensionnées avec taux de vide sont données par

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha\rho) + \nabla \cdot (\alpha\rho\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\alpha\rho\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\alpha\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{\alpha}{M^2} \nabla p = 0. \end{cases} \quad (1)$$

- Hypothèses :

- $\alpha = \alpha(x, y)$ est connue,
 - $\alpha \in [\alpha_{\min}, 1]$, où $\alpha_{\min} > 0$ est une constante indépendante de M ,
 - nous linéarisons (1) autour de $(\rho_\star = cst, \mathbf{u}_\star = 0)$,
 - le domaine d'étude \mathbb{T} est périodique et borné.
- Nous effectuons le changement de variables

$$\rho(t, x, y) := \rho_\star \left(1 + \frac{M}{a_\star} r(t, x, y) \right),$$

où $a_\star^2 = p'(\rho_\star)$ et où formellement $\frac{M}{a_\star} r \ll 1$.

Équations des ondes avec taux de vide

En injectant ceci dans le système initial (1), nous obtenons
l'équation des ondes avec taux de vide

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha r) + \frac{a_*}{M} \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \frac{a_*}{M} \nabla r = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Le noyau de l'opérateur spatial associé au système (2) est donné par l'espace **incompressible**

$$\mathcal{E}_\alpha := \left\{ q = (r, \mathbf{u})^T \in L_\alpha^2(\mathbb{T})^{1+d} \mid \nabla r = 0 \text{ et } \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0 \right\}.$$

L'espace fonctionnel traditionnel $L^2(\mathbb{T})^{1+d}$ (cas où $(\alpha = 1)$) est ici remplacé par l'espace à poids

$$L_\alpha^2(\mathbb{T})^{1+d} := \left\{ q := (r, \mathbf{u})^T \mid \int_{\mathbb{T}} r^2 \alpha dx + \int_{\mathbb{T}} |\mathbf{u}|^2 \alpha dx < +\infty \right\}.$$

Théorème

Il est possible de construire une décomposition de Hodge sur les espaces à poids

$$\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\alpha^\perp = L_\alpha^2(\mathbb{T})^{1+d},$$

où l'espace acoustique \mathcal{E}_α^\perp est donné par

$$\mathcal{E}_\alpha^\perp = \left\{ q = (r, \mathbf{u})^T \in L_\alpha^2(\mathbb{T})^{1+d} \mid \int_{\mathbb{T}} r \alpha dx = 0 \text{ et } \exists \phi \in H_\alpha^1(\mathbb{T}), \mathbf{u} = \nabla \phi \right\}$$

Proposition

Si q est solution de l'équation des ondes avec taux de vide et si q a pour condition initiale q^0 , nous avons

- $\forall q^0 \in \mathcal{E}_\alpha, \quad q(t \geq 0) \in \mathcal{E}_\alpha;$
- $\forall q^0 \in \mathcal{E}_\alpha^\perp, \quad q(t \geq 0) \in \mathcal{E}_\alpha^\perp.$

Objectifs

Nous allons étudier le comportement du schéma de Godunov vis-à-vis des éléments de \mathcal{E}_α .

- Est-ce qu'au niveau discret le schéma de Godunov permet de préserver un élément de \mathcal{E}_α
 - sur maillage triangulaire ?
 - sur maillage cartésien ?
- Est-ce qu'au niveau continu, le schéma de Godunov permet de préserver les états bien préparés ?

Schéma de Godunov

Le schéma de Godunov s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\alpha r)_i + \frac{a_\star}{2M} \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{\Gamma_{ij} \subset \partial\Omega_i} |\Gamma_{ij}| (\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{ij} = 0, \\ \frac{d}{dt}(\alpha \mathbf{u})_i + \frac{a_\star}{2M} \frac{\alpha_i}{|\Omega_i|} \sum_{\Gamma_{ij} \subset \partial\Omega_i} |\Gamma_{ij}| r_{ij} \mathbf{n}_{ij} = 0, \end{cases}$$

où $(r_{ij}, (\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{ij})$ est solution d'un problème du Riemann¹ $1D$ dans la direction \mathbf{n}_{ij}

$$\begin{cases} \alpha_{ij} \partial_t r_\xi + \frac{a_\star}{M} \partial_\xi ((\alpha u)_\xi) = 0, \\ \partial_t ((\alpha u)_\xi) + \frac{a_\star}{M} \alpha_{ij} \partial_\xi r_\xi = 0, \\ (r_\xi, (\alpha u)_\xi) (t=0, \xi) = \begin{cases} (r_i, (\alpha \mathbf{u})_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) & \text{si } \xi < 0, \\ (r_j, (\alpha \mathbf{u})_j \cdot \mathbf{n}_{ij}) & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

1. S. Dellacherie, P. Omnes, On the Godunov scheme applied to the variable cross-section linear equation. FVCA6, (4) :313–321, 2011.

Schéma de Godunov

Le schéma de Godunov s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\alpha r)_i + \frac{a_\star}{2M} \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{\Gamma_{ij} \subset \partial\Omega_i} |\Gamma_{ij}| \left(((\alpha \mathbf{u})_i + (\alpha \mathbf{u})_j) \cdot \mathbf{n}_{ij} + \alpha_{ij}(r_i - r_j) \right) = 0, \\ \frac{d}{dt}(\alpha \mathbf{u})_i + \frac{a_\star}{2M} \frac{\alpha_i}{|\Omega_i|} \sum_{\Gamma_{ij} \subset \partial\Omega_i} |\Gamma_{ij}| \left(r_i + r_j + \frac{\kappa}{\alpha_{ij}} \left((\alpha \mathbf{u})_i - (\alpha \mathbf{u})_j \right) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right) \mathbf{n}_{ij} = 0. \end{cases}$$

avec $\kappa = 1$.

Nous l'écrivons sous la forme

$$\frac{d}{dt}(\alpha q_h) + \frac{\mathbb{L}_{\kappa, \alpha}^h}{M}(q_h) = 0,$$

où $q_h = (r_i, \mathbf{u}_i)^T$.

Maillage triangulaire

Proposition

Nous avons

$$\ker \mathbb{L}_{\kappa=1,\alpha}^h = \mathcal{E}_\alpha^{h,\Delta}.$$

Prenons un élément de \mathcal{E}_α et vérifions s'il est préservé par le schéma de Godunov.

Prenons α et $q = (r, \mathbf{u})^T$ tels que pour tout $(x, y) \in [0, 1[\times [0, 1[$,

- $r(x, y) = 1$,
- $\alpha(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin(\pi x) \sin(2\pi y)$,
- $(\alpha u)(x, y) = 2 \sin^2(\pi x) \sin(4\pi x)$,
- $(\alpha v)(x, y) = -\sin(2\pi x) \sin^2(2\pi y)$.

Nous avons

$$\begin{cases} \nabla r = 0 \\ \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0 \end{cases} \Rightarrow q \in \mathcal{E}_\alpha.$$

Maillage triangulaire

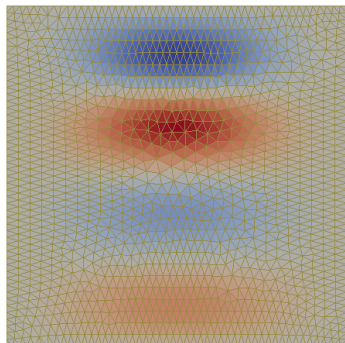
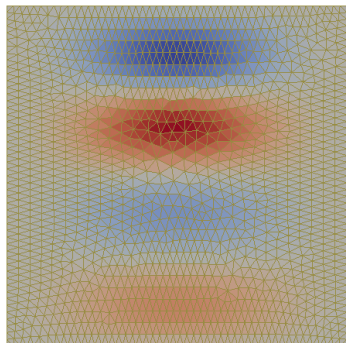
FIGURE : À $t = 0$.

FIGURE : Après 200 itérations.

→ Sur maillage triangulaire, un élément de \mathcal{E}_α semble être préservé.

Maillage cartésien

Proposition

Avec $\kappa = 1$, nous avons

$$\ker \mathbb{L}_{\kappa=1,\alpha}^h \subsetneq \mathcal{E}_\alpha^{h,\square}.$$

→ Sur maillage cartésien, nous devons modifier la diffusion numérique (via κ) du schéma de Godunov pour qu'il préserve un élément de \mathcal{E}_α .

Proposition

Avec $\kappa = 0$, nous avons

$$\mathcal{E}_\alpha^{h,\square} = \ker \mathbb{L}_{\kappa=0,\alpha}^h.$$

Maillage cartésien avec $\kappa = 1$

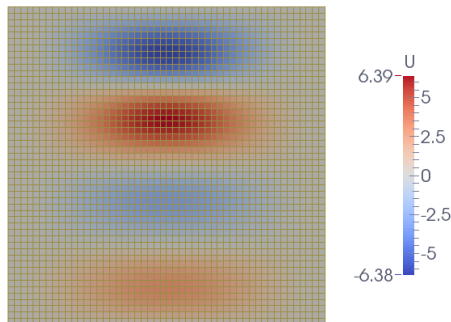


FIGURE : À $t = 0$.

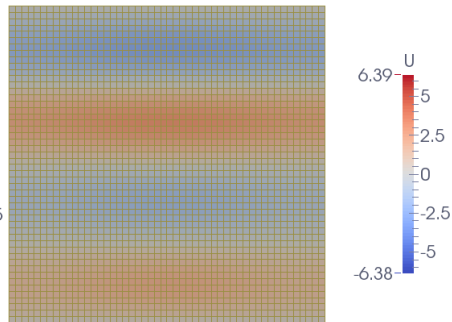


FIGURE : Après 200 itérations.

→ Sur maillage cartésien, le schéma de Godunov ($\kappa = 1$) ne préserve pas un élément de \mathcal{E}_α .

Maillage cartésien avec $\kappa = 0$

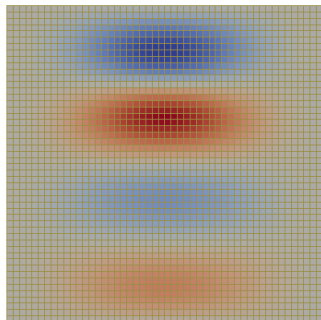


FIGURE : À $t = 0$.

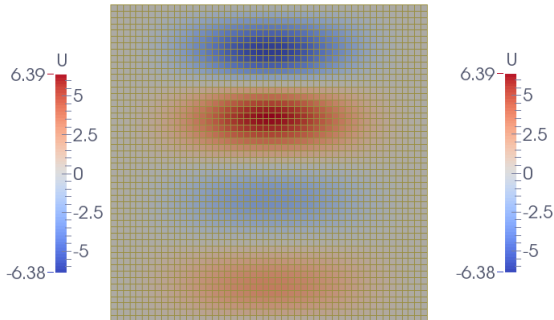


FIGURE : Après 200 itérations.

→ Si nous retirons la diffusion numérique ($\kappa = 0$), le schéma de Godunov semble préserver un élément de \mathcal{E}_α .

L^2_α -stabilité sur maillages triangulaire et cartésien

Proposition

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_i |\Omega_i| \alpha_i (r_i^2 + |\mathbf{u}_i|^2) \right) \\ = -\frac{a_\star}{M} \sum_{\Gamma_{ij}} \left(\alpha_{ij} |r_i - r_j|^2 + \frac{\kappa}{\alpha_{ij}} \left| ((\alpha \mathbf{u})_i - (\alpha \mathbf{u})_j) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right|^2 \right) \leq 0. \end{aligned}$$

→ Le schéma de Godunov est stable pour $\kappa = 1$ et pour $\kappa = 0$.

États bien préparés

Nous allons maintenant étudier le comportement du schéma de Godunov sur **maillage cartésien** vis-à-vis des états bien préparés.

Définition

Nous disons que le schéma de Godunov préserve les états bien préparés si

$$\forall (C_1, C_2) \in (\mathbb{R}_*^+)^2, \|q^0 - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L_\alpha^2} = C_1 M \\ \Rightarrow \forall t \in [0; C_2 M], \|q(t) - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L_\alpha^2} \leq C_3 M,$$

où \mathbb{P}_α est la projection orthogonale sur \mathcal{E}_α .

Équation modifiée

L'équation modifiée associée au schéma de Godunov est

$$\partial_t(\alpha q) + \frac{\mathcal{L}_{\kappa,\alpha}}{M}(q) = 0$$

où $\mathcal{L}_{\kappa,\alpha} = L_\alpha - MB_{\kappa,\alpha}$ et

$$L_\alpha(q) = \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) \\ \alpha \nabla r \end{pmatrix}$$

et

$$B_{\kappa,\alpha}(q) = \begin{pmatrix} \frac{a_\star}{2M} \Delta x \partial_x (\alpha \partial_x r) + \frac{a_\star}{2M} \Delta y \partial_y (\alpha \partial_y r) \\ \frac{a_\star \kappa}{2M} \Delta x \alpha \partial_x \left(\frac{1}{\alpha} \partial_x (\alpha u_x) \right) \\ \frac{a_\star \kappa}{2M} \Delta y \alpha \partial_y \left(\frac{1}{\alpha} \partial_y (\alpha u_y) \right) \end{pmatrix}.$$

Justification de $\kappa = 0$ ou $\kappa = 1$ au niveau continu.

Proposition

- ① Avec $\kappa = 1$, nous avons

$$\ker \mathcal{L}_{\kappa, \alpha} = \left\{ q := (r, \mathbf{u})^T \mid \nabla r = 0 \text{ et } \partial_x(\alpha u_x) = \partial_y(\alpha u_y) = 0 \right\} \subsetneq \mathcal{E}_\alpha$$

- ② Avec $\kappa = 0$, nous avons

$$\ker \mathcal{L}_{\kappa, \alpha} = \mathcal{E}_\alpha.$$

→ Au niveau continu, le schéma de Godunov préserve un élément de \mathcal{E}_α si nous supprimons la diffusion numérique ($\kappa = 0$).

$\kappa = 1$ et états bien préparés

Théorème

Si $\kappa = 1$ et si q est une solution du système modifié ayant $q^0 \in L^2_\alpha(\mathbb{T})^3$ pour condition initiale, nous avons

$$\forall C_0, C_1, C_2, C_3 > 0, \begin{cases} \|q^0 - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L^2_\alpha} \leq C_0 M \\ \Delta x = C_1 M \\ \Delta y = C_2 M \end{cases} \\ \Rightarrow \forall t \in [0, C_3 M], \|q(t) - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L^2_\alpha} \leq C_4 M,$$

où $C_4 > 0$ indépendante de M , Δx et Δy .

→ Nous devons prendre une discrétisation de l'ordre de M .

$\kappa = M$ et états bien préparés

Théorème

Si $\kappa = M$ et si q est une solution du système modifié ayant q^0 pour condition initiale, nous avons

$$\forall C_2, C_3 > 0, \|q^0 - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L^2_\alpha} \leq C_2 M$$
$$\Rightarrow \forall t \in [0; C_3 M], \|q(t) - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L^2_\alpha} \leq C_4 M,$$

avec $C_4 > 0$ indépendante de M .

Conclusions et perspectives

Conclusions : Nous avons

- constaté le bon comportement du schéma de Godunov sur maillage triangulaire à faible nombre de Mach,
- constaté le mauvais comportement du schéma de Godunov sur maillage cartésien à faible nombre de Mach,
- proposé une correction sur maillage cartésien.

Perspectives :

- Étendre les preuves liées au comportement du schéma de Godunov vis-à-vis des états bien préparés au niveau discret.
- Introduire le terme d'advection dans l'étude.
- Faire évoluer α en fonction du temps.
- Tester la méthode dans le cas non linéaire.

Merci de votre attention !!

