



Calcul d'un écoulement de deux fluides compressibles sur GPU

J. Jung, P. Helluy

IRMA, Université de Strasbourg

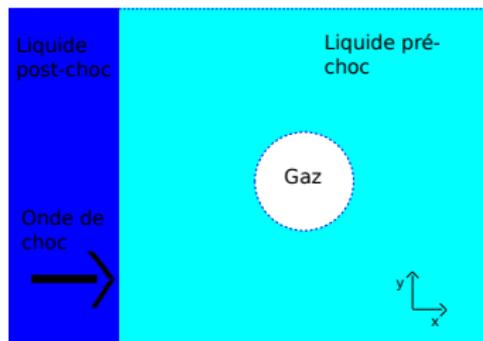
Orsay, GTN, Mardi 13 novembre 2012

Plan

- 1 Introduction
- 2 Schéma numérique
- 3 Implémentation sur GPU
- 4 Applications

Objectif :

Cas d'étude : interaction
choc-bulle dans un liquide.



- Écoulement d'un milieu constitué de fluides compressibles non miscibles.
- Hypothèse : Le gaz et l'eau sont des fluides compressibles.

Modèle

On considère les équations d'Euler compressible en dimension 2 :

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) + \partial_y(\rho uv) &= 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2 + p) &= 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x((\rho E + p)u) + \partial_y((\rho E + p)v) &= 0,\end{aligned}$$

où ρ est la masse volumique, (u, v) le vecteur vitesse et E l'énergie totale.

On y ajoute la convection de la fraction de masse de gaz φ ,

$$\partial_t \varphi + u \partial_x \varphi + v \partial_y \varphi = 0.$$

⇒ On obtient un seul système pour les deux fluides.

On a 5 équations pour 6 inconnues.

Loi d'état

Pour clore le système on suppose que p satisfait la loi de pression des gaz raides :

$$p(\rho, e, \varphi) = (\gamma(\varphi) - 1)\rho e - \gamma(\varphi)\pi(\varphi),$$

où $e = E - (u^2 + v^2)/2$.

La vitesse du son c est définie par $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial e}$, soit

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p + \pi}{\rho}}.$$

Pour $p = 10^5 Pa$,

- dans le gaz ($\rho = 1.225$), on a $\varphi = 1$, $\gamma_{gaz} = 1.4$,
 $c_{gaz} \approx 340 m/s$ d'où $\pi_{gaz} \approx 0$ (gaz parfait).
- dans le liquide ($\rho = 1000$), on a $\varphi = 0$, $\gamma_{liq} = 4.4$,
 $c_{liq} \approx 1500 m/s$, on prend $\pi_{liq} \approx 5 \times 10^8$.

Loi d'état

- On a

$$\partial_t \varphi + u \partial_x \varphi + v \partial_y \varphi = 0$$

⇒ théoriquement φ vaut 0 ou 1 à chaque instant (il n'y a pas de mélange).

- Numériquement, on peut avoir de la diffusion, les paramètres de la loi d'état du mélange (Saurel, 1999) sont définis par

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma(\varphi) - 1} &= \varphi \frac{1}{\gamma_{\text{gaz}} - 1} + (1 - \varphi) \frac{1}{\gamma_{\text{liq}} - 1}, \\ \frac{\gamma(\varphi)\pi(\varphi)}{\gamma(\varphi) - 1} &= \varphi \frac{\gamma_{\text{gaz}}\pi_{\text{gaz}}}{\gamma_{\text{gaz}} - 1} + (1 - \varphi) \frac{\gamma_{\text{liq}}\pi_{\text{liq}}}{\gamma_{\text{liq}} - 1}. \end{aligned}$$

Forme conservative

On peut écrire le système sous forme conservative :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) + \partial_y G(W) = 0,$$

où le vecteur de variables conservatives est :

$$W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \varphi)^T,$$

et les flux conservatifs sont :

$$F(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (\rho E + p)u, \rho \varphi u)^T,$$
$$G(W) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (\rho E + p)v, \rho \varphi v)^T.$$

Propriétés physiques :

- la masse volumique ρ est positive,
- l'énergie interne e est positive,
- la fraction de masse de gaz φ appartient à $[0; 1]$.

Propriétés mathématiques :

- Supposant les propriétés physiques satisfaites, le système est hyperbolique dans chaque direction. Pour tout $n = (n_1, n_2)^T$, la matrice $n_1 D_W F(W) + n_2 D_W G(W)$ est diagonalisable et admet pour valeur propre :

$$\lambda_1 = (u, v)^T \cdot n - c, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u, \quad \lambda_5 = (u, v)^T \cdot n + c.$$

- On peut montrer que le problème de Riemann admet une solution entropique globale entropique.
- La pression et la vitesse sont continues à l'interface entre les deux fluides.

Objectifs

Construire un schéma numérique :

- préservant la positivité de ρ et e ,
- ne diffusant pas la fraction de masse de gaz φ ,
- résistant à l'apparition du vide,
- satisfaisant une inégalité entropique discrète,
- préservant une pression et vitesse constantes à l'interface entre les deux fluides,
- simple de manière à pouvoir facilement paralléliser le calcul sur GPU.

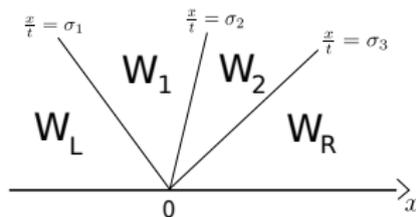
On va tout d'abord se placer dans le cas de la dimension un, on souhaite résoudre le système

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = 0,$$

où

$$W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \varphi)^T,$$
$$F(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (\rho E + p)u, \rho \varphi u)^T.$$

Connaissant la exacte du problème de Cauchy, on pourra y comparer notre solution numérique.



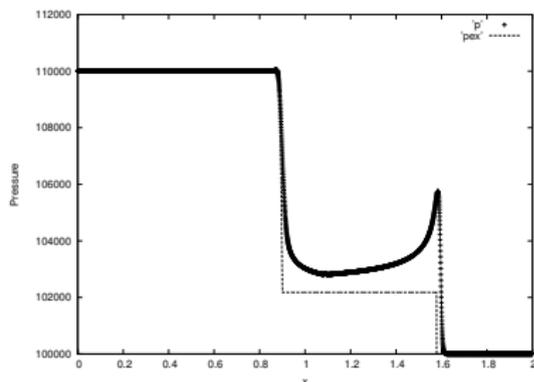
Exemple des schémas numériques conservatifs classiques

On constate des oscillations sur la pression et la vitesse à l'interface entre les deux fluides.

En considérant le problème de Cauchy suivant :

Quantités	$x < 1$	$x > 1$
$\rho(kg.m^{-3})$	10	1
$u(m.s^{-1})$	50	50
$p(Pa)$	$1.1e5$	$1e5$
φ	1	0
γ	1.4	1.1
π	0	0

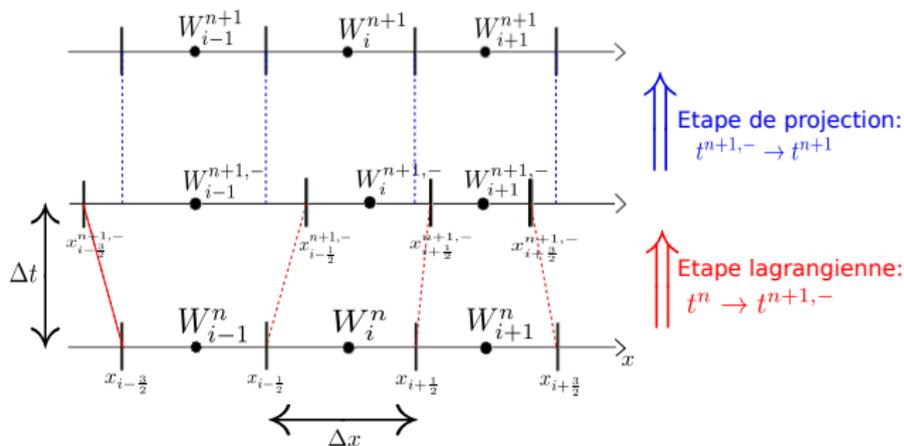
on obtient :



Structure du schéma numérique

Le schéma se décompose en deux étapes :

- une étape lagrangienne pour résoudre le système $\partial_t W + \partial_x F(W) = 0$, entre les temps t^n et $t^{n+1,-}$,
- une étape de projection pour recalculer les variables d'Euler au temps t^{n+1} sur la grille d'origine.



Quelques notations

- On propose un schéma de volumes finis d'ordre 1 avec une approche lagrangienne, la frontière $x_{i+\frac{1}{2}}$ se déplace à la vitesse du fluide $u_{i+\frac{1}{2}}^n$ entre t^n et $t^{n+1,-}$:

$$x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,-} = x_{i+\frac{1}{2}}^n + \Delta t u_{i+\frac{1}{2}}^n.$$

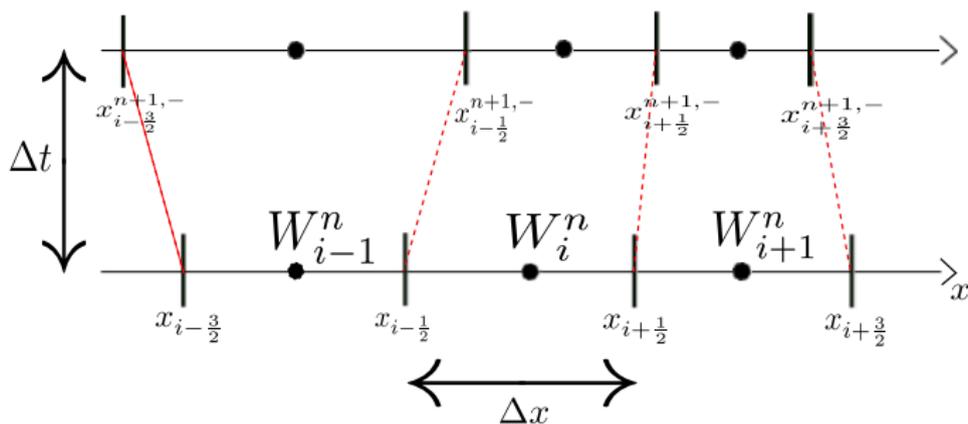
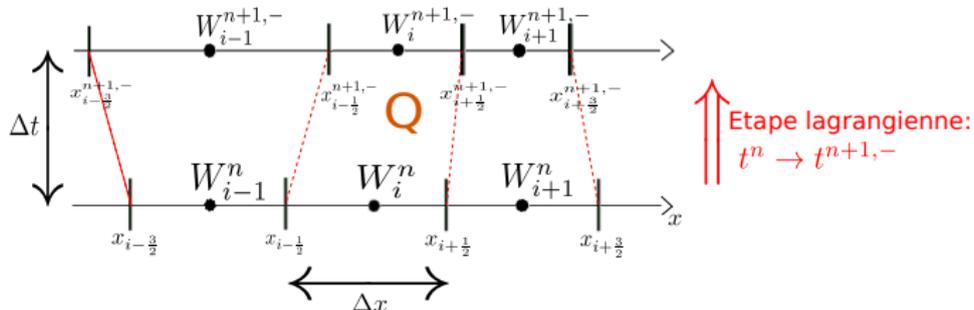


Schéma de volumes finis



L'intégration de $\partial_t W + \partial_x F(W) = 0$ sur le quadrilatère espace-temps Q nous donne :

$$\Delta x_i^{n+1,-} W_i^{n+1,-} - \Delta x W_i^n + \Delta t (F(W_i^n, W_{i+1}^n) - F(W_{i-1}^n, W_i^n)) = 0$$

où $F(W_L, W_R)$ est le flux Lagrangien et Δt satisfait une condition de type CFL.

Flux Lagrangien

On rappelle que le flux Lagrangien a la forme :

$$F(W_i^n, W_{i+1}^n) : = (0, p_{i+\frac{1}{2}}^n, 0, u_{i+\frac{1}{2}}^n p_{i+\frac{1}{2}}^n, 0)^T.$$

Pour calculer les quantités en $i + 1/2$, on peut utiliser un solveur de Riemann exact ou un solveur approché de type relaxation (Bouchut, Siliciu) nous donnant :

$$u_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{c_{i+1/2,L}^n u_i^n + c_{i+1/2,R}^n u_{i+1}^n + p_i^n - p_{i+1}^n}{c_{i+1/2,L}^n + c_{i+1/2,R}^n},$$
$$p_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{c_{i+1/2,R}^n p_i^n + c_{i+1/2,L}^n p_{i+1}^n + c_{i+1/2,L}^n c_{i+1/2,R}^n (u_i^n - u_{i+1}^n)}{c_{i+1/2,L}^n + c_{i+1/2,R}^n},$$

où $c_{i+1/2,L}^n$ et $c_{i+1/2,R}^n$ sont choisis de manière à ce que notre solveur ait de bonnes propriétés.

Solveur de relaxation

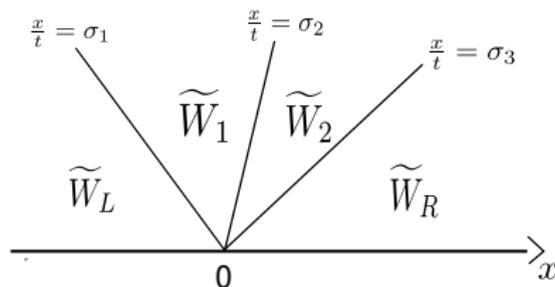
Le solveur de relaxation consiste à résoudre le problème de Riemann :

$$\partial_t \widetilde{W} + \partial_x \widetilde{F}(\widetilde{W}) = 0,$$

où

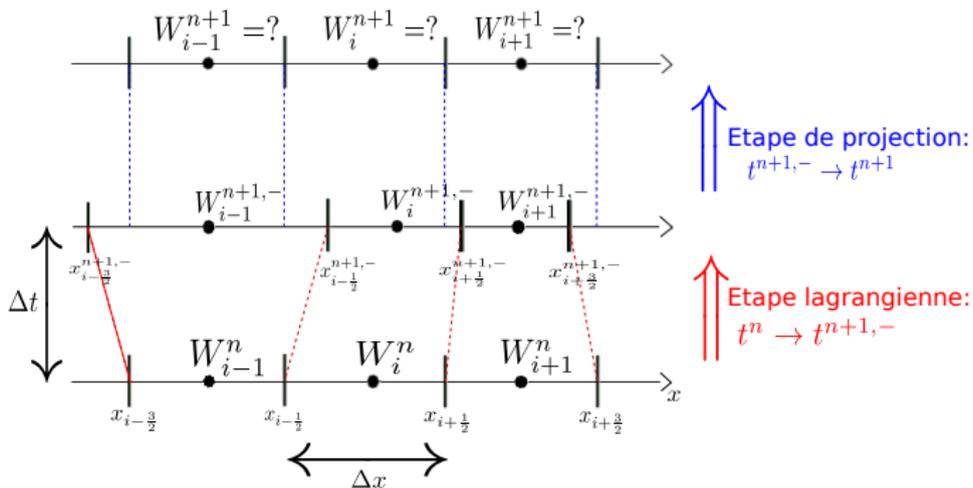
$$\widetilde{W} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \varphi, \frac{\rho \beta}{c^2}, \rho c, \rho s)^T,$$

$$\widetilde{F}(\widetilde{W}) = (\rho u, \rho u^2 + \beta, \rho uv, (\rho E + \beta)u, \rho \varphi u, \frac{\rho \beta u}{c^2} + u, \rho cu, \rho su)^T.$$



Étape de projection

- L'étape lagrangienne est effectuée : on a $W_i^{n+1,-}$.
- Problème : comment effectuer la projection pour retourner à la grille originale ?



Projection classique : averaging projection

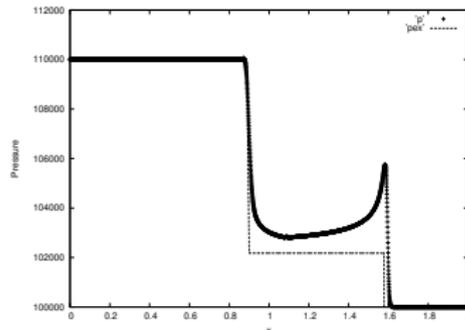
On prend

$$W_i^{n+1} = W_i^{n+1,-} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\max(u_{i-\frac{1}{2}}, 0)(W_i^{n+1,-} - W_{i-1}^{n+1,-}) + \min(u_{i+\frac{1}{2}}, 0)(W_{i+1}^{n+1,-} - W_i^{n+1,-})).$$

Problème : On considère

Quantités	$x < 1$	$x > 1$
$\rho (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	10	1
$u (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	50	50
$p (\text{Pa})$	$1.1 \text{e}5$	$1 \text{e}5$
φ	1	0
γ	1.4	1.1
π	0	0

On obtient des oscillations sur la pression :



Projection de Glimm

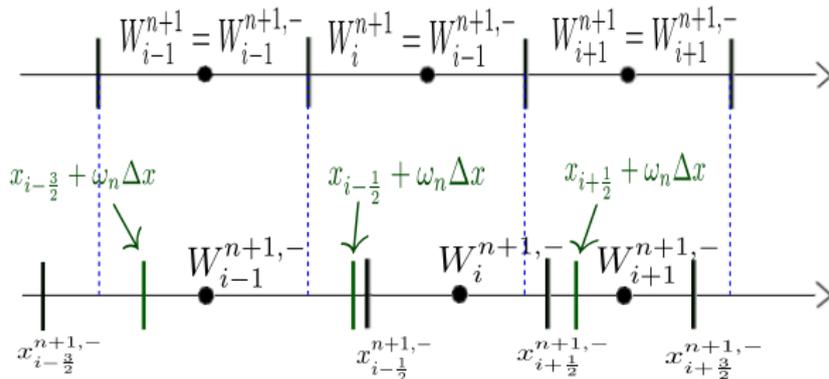
On choisit aléatoirement un point dans la cellule, on prend la valeur Lagrangienne correspondant à la position de ce point dans la cellule. Plus précisément, soit ω_n un nombre aléatoire dans $[0; 1[$, on prend :

$$W_i^{n+1} = \begin{cases} W_{i-1}^{n+1,-}, & \text{if } x_{i-\frac{1}{2}} + \omega_n \Delta x < x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,-}, \\ W_i^{n+1,-}, & \text{if } x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,-} \leq x_{i-\frac{1}{2}} + \omega_n \Delta x \leq x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,-}, \\ W_{i+1}^{n+1,-}, & \text{if } x_{i-\frac{1}{2}} + \omega_n \Delta x > x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,-}. \end{cases}$$

\Rightarrow le schéma résultant n'est pas conservatif mais ne diffuse pas φ .

Projection de Glimm

Illustration : On pioche un nombre aléatoire $\omega_n \in [0; 1[$.



- $x_{i-\frac{3}{2}}^{n+1,-} \leq x_{i-\frac{3}{2}} + \omega_n \Delta x \leq x_{i+\frac{3}{2}}^{n+1,-} \Rightarrow W_{i-1}^{n+1} = W_{i-1}^{n+1,-}$,
- $x_{i-\frac{1}{2}} + \omega_n \Delta x < x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,-} \Rightarrow W_{i-1}^{n+1} = W_{i-1}^{n+1,-}$,
- $x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,-} \leq x_{i+\frac{1}{2}} + \omega_n \Delta x \leq x_{i+\frac{3}{2}}^{n+1,-} \Rightarrow W_{i-1}^{n+1} = W_{i-1}^{n+1,-}$.

Choix pour ω_n

Un bon choix pour la suite aléatoire ω_n est la (k_1, k_2) suite de Van Der Coput. Une implémentation en C est donnée par :

```
float corput ( int n, int k1, int k2){  
    float corput = 0;  
    float s = 1;  
    while(n > 0){  
        s /= k1;  
        corput += (k2 * n%k1)%k1 * s;  
        n /= k1;  
    }  
    return corput;  
}
```

Dans cet algorithme, k_1 et k_2 sont deux nombres premiers satisfaisant $k_1 > k_2 > 0$. En pratique, on utilise la $(5, 3)$ suite de Van der Coput. Avec 200 valeurs, on a une espérance de 0.49598 et un écart type de 0.28907.

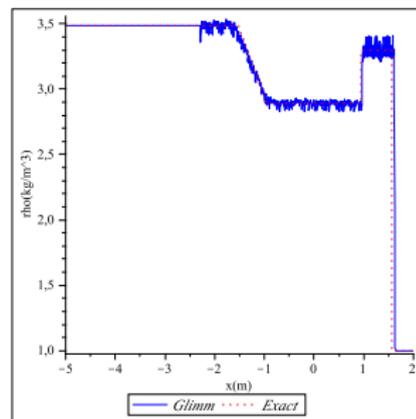
Problème : le schéma résultant ne converge pas toujours

On considère l'interaction entre un choc se propageant à la vitesse $\sigma = 4$ et une discontinuité de contact de vitesse $u = -1$.

On obtient des instabilités dues au choc de forte amplitude :

Quantités	$x < -4$	$-4 < x < 1$	$x > 1$
$\rho(\text{kg.m}^{-3})$	3.488	2	1
$u(\text{m.s}^{-1})$	1.13	-1	-1
$p(\text{Pa})$	23.33	2	2
φ	1	1	0
γ	1.4	1.4	2
π	0	0	7

Après l'interaction, la solution est donnée par la résolution d'un problème de Riemann entre les états gauche et droit.



Solution : une projection mixte

On applique la projection de Glimm uniquement à l'interface entre les deux fluides

- If $(\varphi_{i-1}^n - \frac{1}{2})(\varphi_i^n - \frac{1}{2}) < 0$ or $(\varphi_i^n - \frac{1}{2})(\varphi_{i+1}^n - \frac{1}{2}) < 0$,

On prend un nombre aléatoire $\omega_n \in [0, 1[$, et on choisit :

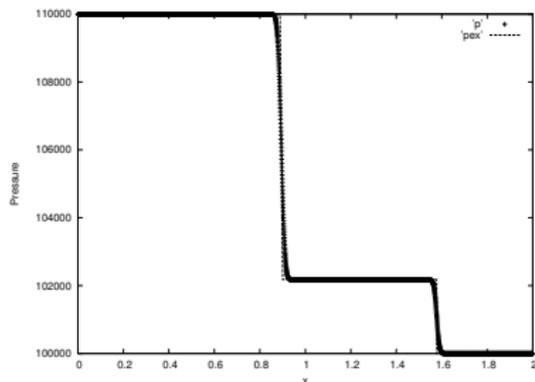
$$W_i^{n+1} = \begin{cases} W_{i-1}^{n+1,-}, & \text{if } x_{i-\frac{1}{2}} + \omega_n \Delta x < x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,-}, \\ W_i^{n+1,-}, & \text{if } x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,-} \leq x_{i-\frac{1}{2}} + \omega_n \Delta x \leq x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,-}, \\ W_{i+1}^{n+1,-}, & \text{if } x_{i-\frac{1}{2}} + \omega_n \Delta x > x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,-}, \end{cases}$$

- sinon,

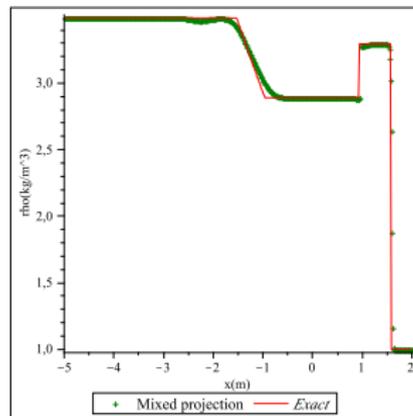
$$W_i^{n+1} = W_i^{n+1,-} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\max(u_{i-\frac{1}{2}}, 0)(W_i^{n+1,-} - W_{i-1}^{n+1,-}) + \min(u_{i+\frac{1}{2}}, 0)(W_{i+1}^{n+1,-} - W_i^{n+1,-}) \right).$$

Resultats obtenus avec la projection mixte

On n'a plus d'oscillations sur la pression dans le cas où la projection classique échouait.

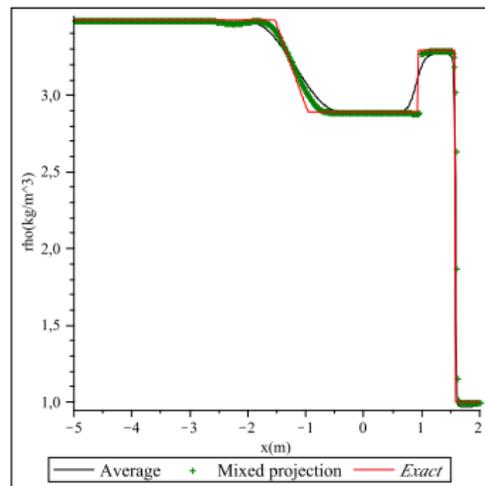


On n'a plus d'instabilités sur la masse volumique dans le cas où la projection de Glimm échouait :

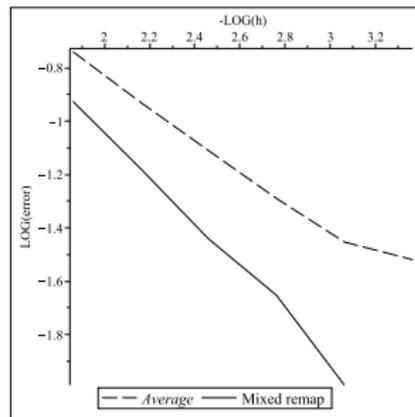


Convergence de la projection mixte

L'interface est résolu en un seul point avec la projection mixte.



Le taux de convergence est approximativement 0.5 pour la projection conservative tandis qu'il est de 0.8 pour la projection mixte.



Propriétés

On a construit un schéma numérique :

- préservant la positivité de ρ et e ,
- ne diffusant pas la fraction de masse de gaz φ ,
- satisfaisant une inégalité entropique discrète ?,
- préservant une pression et vitesse constante à l'interface entre les deux fluides,
- résistant au vide.

Splitting directionnel

Pour résoudre

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) + \partial_y G(W) = 0, \\ W(x, y, t = 0) = W_0(x, y), \end{cases}$$

entre les temps $t = 0$ et $t = \Delta t$, on utilise le splitting directionnel.

- Premièrement, on résout

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) = 0, \\ W(x, y, t = 0) = W_0(x, y), \end{cases}$$

entre les temps $t = 0$ et $t = \Delta t$, on obtient W_1 .

- Deuxièmement, on résout

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_y G(W) = 0, \\ W(x, y, t = 0) = W_1(x, y), \end{cases}$$

entre les temps $t = 0$ et $t = \Delta t$.

⇒ On obtient une solution à l'ordre 1 en temps.

- Grâce au splitting directionnel, on s'est ramené à deux résolutions 1D pour résoudre un problème 2D.
- On va résoudre chaque étape à l'aide de notre schéma lagrange-projection.
- Pour des raisons de performance, on va développer notre code sur GPU.

Qu'est-ce qu'un GPU ?

Un Graphics Processing Unit (GPU) est constitué :

- d'une mémoire globale (typiquement 1 Gb)
- d'unités de calcul (typiquement 27).

Chaque unité de calcul possède :

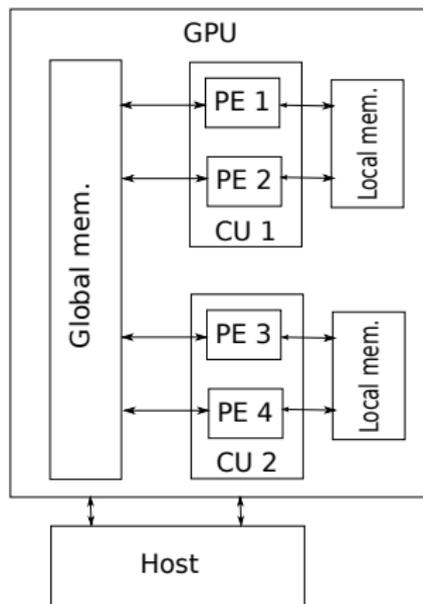
- des processeurs (typiquement 8).
- une mémoire locale (typiquement 16 kb)

Le même programme peut être exécuté sur tous les processeurs en même temps.

- Chaque processeur a accès à la mémoire globale.
- Les processeurs n'ont accès qu'à la mémoire locale de leur unité de calcul.
- Les accès à la mémoire globale sont lents (400 à 600 cycles) tandis que les accès à la mémoire locale sont rapides (100 fois plus rapide).

Exemple d'un GPU

Un GPU virtuel avec 2 unités de calcul et 4 processeurs



OpenCL

- OpenCL signifie "Open Computing Language". Il comporte :
 - Une librairie de fonctions C, appelées à partir de l'hôte, afin de piloter le GPU.
 - Un langage de type C permettant d'écrire les kernels qui seront exécutés sur les processeurs.
- Virtuellement, il permet d'avoir autant d'unités de calcul (work-groups) et de processeurs (work-items) que l'on souhaite.
- Les threads sont envoyés au GPU grâce à un mécanisme de "command queues" sur la réelle unité de calcul et les processeurs.
- Le même programme peut être exécuté sur un CPU multi-coeur et un GPU.

Implémentation en dimension 1

- Initialisation : on initialise les variables sur le CPU et on les envoie au GPU.
 - Mise à jour temporelle :
 - Calcul de $W_i^{n+1,-}$: on associe à chaque cellule de la grille un processeur (work-item). On calcule les flux et on effectue l'étape de mise à jour temporelle. On stocke $W_i^{n+1,-}$ en mémoire cache.
 - À cause du stockage en mémoire cache, on doit effectuer des recouvrements de domaine.
 - On attend que tous les processeurs aient fini le calcul.
 - Projection : on effectue la projection mixte pour obtenir W_i^{n+1} .
- On réitère tant que $t < t_{final}$.
- On transfère toutes les données au CPU pour les tracés graphiques.

Implementation en dimension 2

- Initialisation : on initialise les variables sur le CPU et on envoie tout sur le GPU. On organise les données dans une grille (x, y) .
- Pour chaque étape temporelle :
 - On associe à chaque ligne de la grille un work-group et à chaque cellule de la ligne un processeur virtuel (work-item). On effectue le calcul des flux et la projection dans la direction x pour chaque work-group.
 - On "transpose" : on échange les composantes ρu et ρv et on réorganise les données de sorte que les directions x et y soient échangées.
 - On calcule les flux et on fait la projection dans la direction y pour chaque work group. Grâce à la transposition, les accès mémoire sont optimaux.
 - On transpose pour la prochaine étape temporelle.
- On envoie toutes les données au CPU.

Tests pour la projection mixte en 2D

La projection mixte possède une partie aléatoire, on veut voir si son couplage avec le splitting directionnel se comporte bien en dimension 2.

On va effectuer deux tests :

- la convection d'une bulle,
- le test de Zalesak [Z1979].

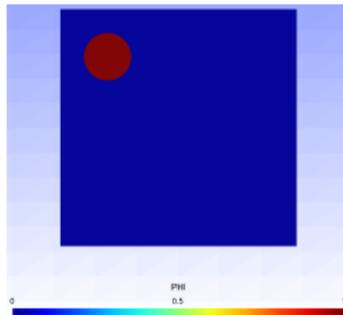
Bulle convectée

On convecte une bulle sphérique.

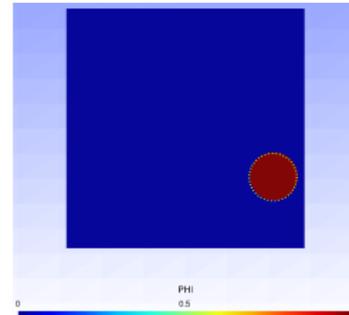
- Données initiales :

Quantités	Bulle	Ext.
$\rho(kg.m^{-3})$	1.225	1000
$u(m.s^{-1})$	100	100
$v(m.s^{-1})$	-75	-75
$p(Pa)$	1.01e5	1.01e5
φ	1	0
γ	1.4	3
π	0	7.5e8

- Instant initial :



- À $t = 0.0067s$:



Test de Zalesak [Z1979]

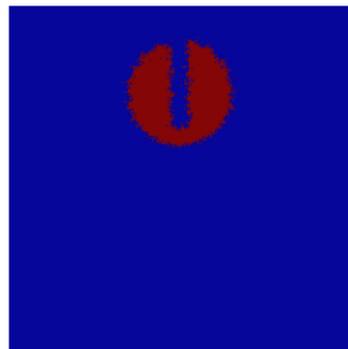
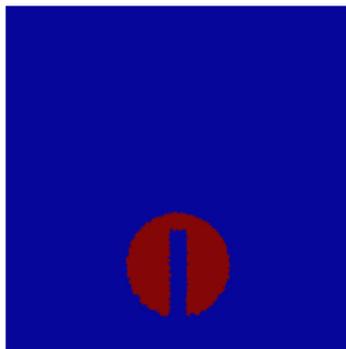
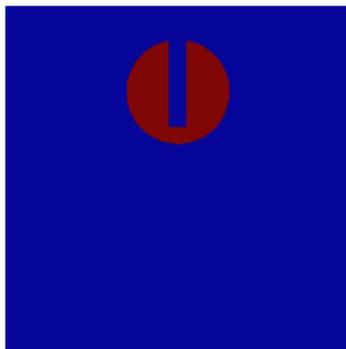
On étudie l'évolution d'un solide complexe soumis à une rotation.

On impose

$$u = -\Omega(y - y_0), \quad v = \Omega(x - x_0),$$

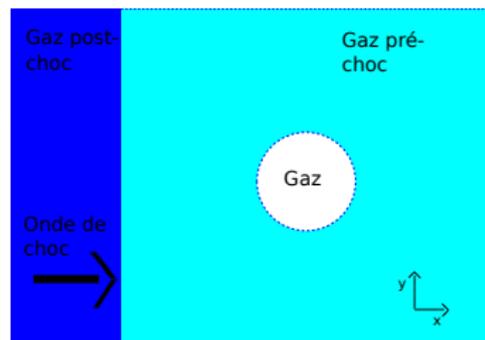
où $\Omega = \frac{2\pi}{628}$ est la vitesse de rotation et (x_0, y_0) est l'axe de rotation.

- Instant initial :
- $\frac{1}{2}$ révolution :
- 5 révolutions :



Intéraction choc-bulle (gaz/gaz)

Une onde de choc vient percuter une bulle de réfrigérant R22 à la vitesse $\sigma = 415 m.s^{-1}$ [HS1997, KL2010].



Les données initiales sont les suivantes :

Quantités	Y1	Y2	Y3
$\rho(kg.m^{-3})$	1.69	1.22	3.86
$u(m.s^{-1})$	113.5	0	0
$v(m.s^{-1})$	0	0	0
$p(Pa)$	1.6e5	1.0e5	1.0e5
φ	0	0	1
γ	1.4	1.4	1.249
π	0	0	0

Temps final = $417 \mu s$.

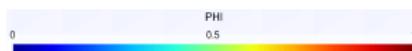
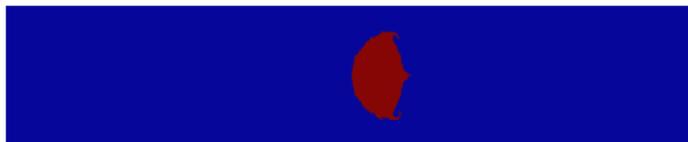
Grille : 5000×1000 .

Temps de calcul sur GPU :

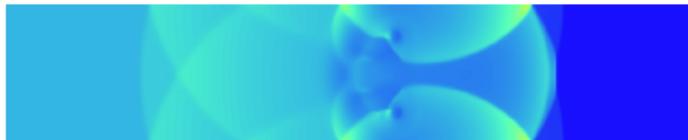
$300s \approx 5min$.

Résultats numériques

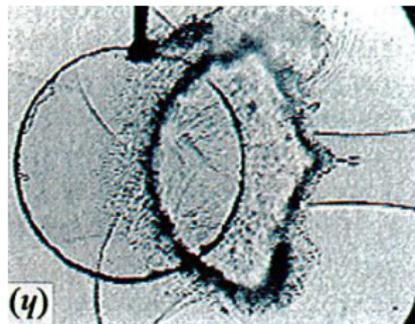
La fraction de masse



La pression



Expérience de
Hass et Sturtevant
[HS1997] :

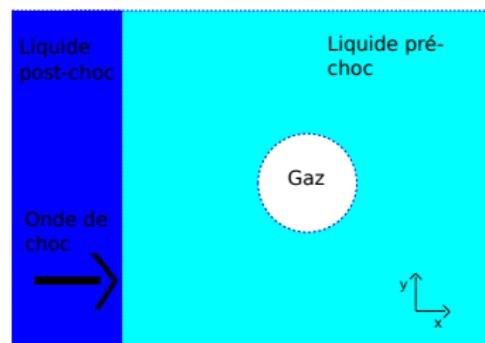


Vidéo

- Nombre de points de la grille = $512 \times 512 \simeq 262\,000$.
- Nombre d'inconnues par unité de temps
= Nombre de points de la grille $\times 5$.
 $\simeq 1\,310\,000$.

Intéraction choc-bulle (eau/gaz)

Un choc dans l'eau vient percuter une bulle d'air à la vitesse $\sigma = 1008 m.s^{-1}$ ([KL2010]).



Les données initiales sont :

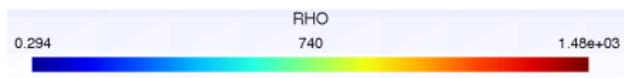
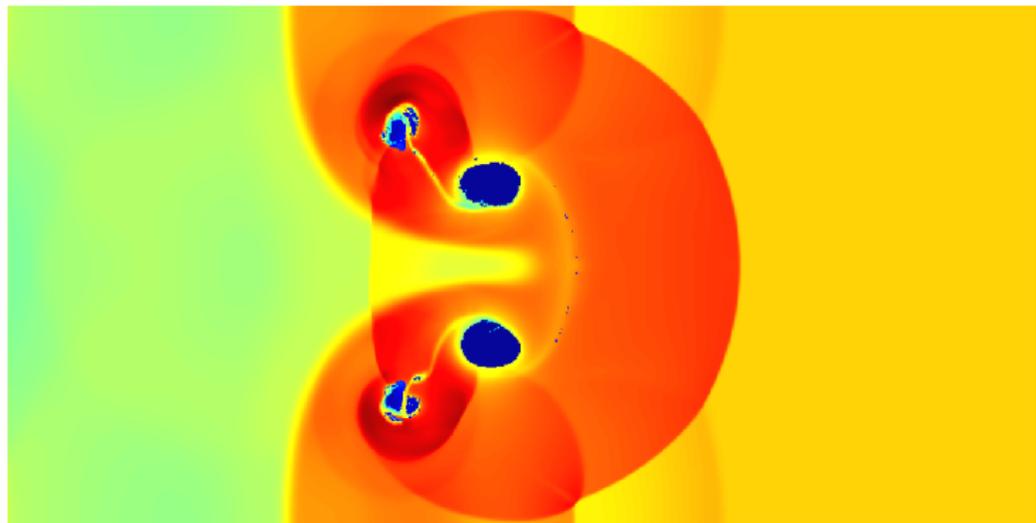
Quantités	Y1	Y2	Y3
$\rho(kg.m^{-3})$	1030.9	1000	1
$u(m.s^{-1})$	300	0	0
$v(m.s^{-1})$	0	0	0
$p(Pa)$	3.0e9	1.0e5	1.0e5
φ	0	0	1
γ	4.4	4.4	1.4
π	6.8e8	6.8e8	0

Temps final=600 μs .

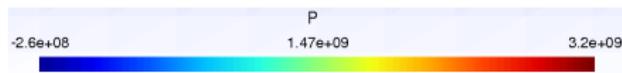
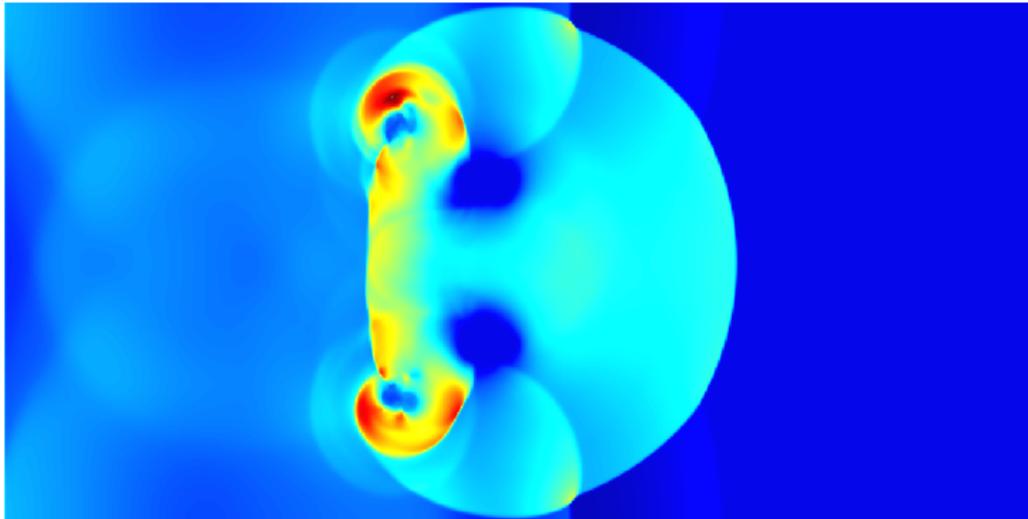
Grille : 3000 \times 1500.

Temps de calcul sur GPU :
490s \approx 8min.

La masse volumique



La pression



Vidéo

- Nombre de cellules de la grille = 1516×760 .
- Nombre d'inconnues par unité de temps :
= Nombre de points de la grille $\times 5$.
 $\simeq 5\,760\,800$.

Comparaison des temps de calcul

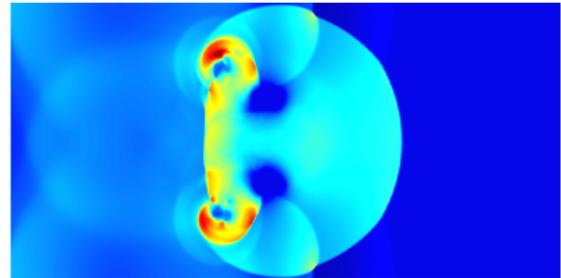
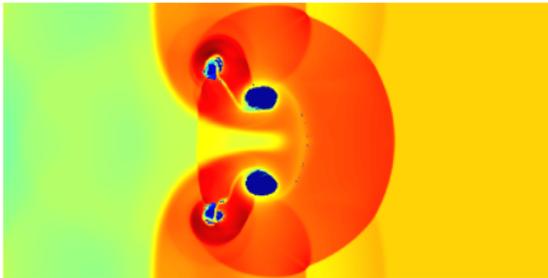
Les calculs correspondent à 300 itérations sur une grille 1024×512 .

	time (s)
AMD A8 3850 (1 coeur)	527
AMD A8 3850 (4 coeurs)	205
NVIDIA GeForce 320M	56
AMD Radeon HD5850	3
AMD Radeon HD7970	2

Conclusion

- On a développé un algorithme robuste permettant de traiter des écoulements compressibles complexes.
- Travaux actuels : Développement d'un code 3D multi-GPU afin d'étudier :
 - des interactions choc-bulle (sphérique),
 - les phénomènes de cavitation,
 - le déferlement de vague.

Merci pour votre attention !



-  C. Chalons, F. Coquel. Computing material fronts with Lagrange-Projection approach. HYP2010 Proc.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00548938/fr/>.
-  B. Després, F. Lagoutière. Numerical resolution of a two-component compressible fluid model with interfaces. Prog. Comp. Fluid Dyn. 7 (6) (2007) 295-310.
-  J.F. Hass, B. Sturtevant. Interaction of weak shock waves with cylindrical anispherical gas inhomogeneities. J. Fluid Mechanics, 181, 41-71,1997.
-  S. Kokh, F. Lagoutière. An anti-diffuse numerical scheme for the simulation of interfaces between compressible fluids by means of a five-equation model. Journal of Comp. Phy. 229 (2010) 2773-2809.

-  Saurel, R. ; Abgrall, R. A simple method for compressible multifluid flows. SIAM J. Sci. Comput. 21 (1999), no. 3, 1115-1145
-  Steven T. Zalesak. Fully Multidimensional Flux-Corrected Transports Algorithms for Fluids. Journal of Comp. Phy. 31 (1979) 335-362.