

## Modèle

On considère l'écoulement d'un mélange de deux fluides compressibles (un gaz et un liquide par exemple) en dimension 2. Le modèle est le suivant :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) + \partial_y G(W) = 0, \quad (1)$$

où le vecteur de variables conservatives est  $W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \varphi)^T$ ,  $\varphi = 1$  dans le gaz,  $\varphi = 0$  dans le liquide et les flux conservatifs sont

$$F(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (\rho E + p)u, \rho \varphi u)^T, \quad (2)$$

$$G(W) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (\rho E + p)v, \rho \varphi v)^T. \quad (3)$$

Sans perte de généralité, on considère la loi de pression des gaz raides

$$p(\rho, e, \varphi) = (\gamma(\varphi) - 1)\rho e - \gamma(\varphi)\pi(\varphi) \text{ avec } e = E - (u^2 + v^2)/2. \quad (4)$$

## Schéma numérique

### • Splitting directionnel

Pour résoudre le système (1) avec la condition initiale  $W(x, y, t = 0) = W_0(x, y)$  entre les temps  $t = 0$  et  $t = \Delta t$  on utilise le splitting directionnel.

– Premièrement, on résout

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) = 0, \\ W(x, y, t = 0) = W_0(x, y), \end{cases} \quad (5)$$

– Ensuite, on résout

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_y G(W) = 0, \\ W(x, y, t = 0) = W_1(x, y), \end{cases} \quad (6)$$

entre les temps  $t = 0$  et  $t = \Delta t$ , on obtient  $W_1$ .

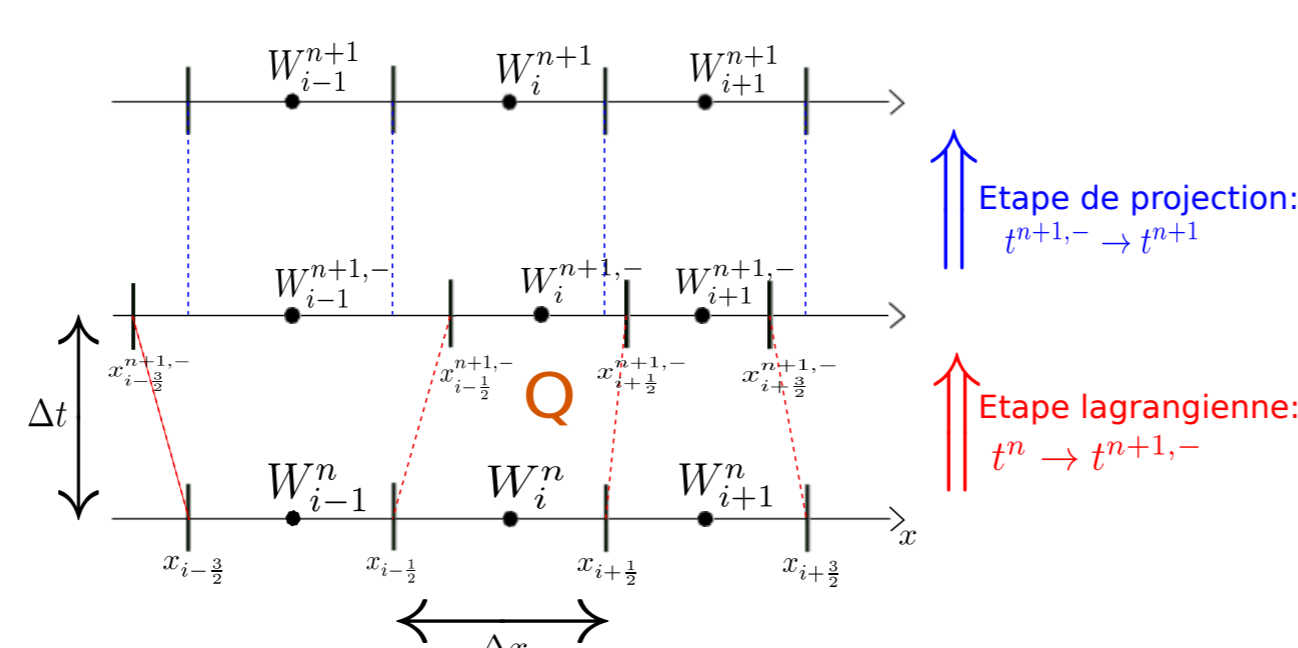
entre les temps  $t = 0$  et  $t = \Delta t$ , on obtient  $W_2$ .

$\Rightarrow W_2$  est une **approximation à l'ordre 1 en temps** de la solution exacte à l'instant  $\Delta t$ .

### • Schéma Lagrange-projection pour une étape du splitting

Le schéma se divise en deux étapes :

- l'étape lagrangienne : résolution de (5) sur un maillage qui se déplace à la vitesse du fluide,
- l'étape de projection : retour sur la grille eulérienne.



#### • Étape lagrangienne

La frontière  $x_{i+1/2}$  se déplace à la vitesse du fluide  $u_{i+1/2}^n$  entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  :

$$x_{i+1/2}^{n+1,-} = x_{i+1/2}^n + \Delta t u_{i+1/2}^n. \quad (7)$$

En intégrant (5) sur le trapèze espace-temps  $Q$ , on obtient

$$\Delta x_i^{n+1,-} W_i^{n+1,-} - \Delta x_i^n W_i^n + \Delta t (F(W_i^n, W_{i+1}^n) - F(W_{i-1}^n, W_i^n)) = 0 \quad (8)$$

où  $F(W_L, W_R)$  est le **flux Lagrangien** et  $\Delta t$  satisfait la condition CFL. Pour le calcul du flux Lagrangien, on utilise un solveur **HLL** (voir [1]).

#### • Étape de projection

On retourne à la grille d'origine par la procédure suivante (voir [2]) :

- si on est à l'interface (c.a.d. si  $(\varphi_{i-1}^n - \frac{1}{2})(\varphi_i^n - \frac{1}{2}) < 0$  ou  $(\varphi_i^n - \frac{1}{2})(\varphi_{i+1}^n - \frac{1}{2}) < 0$ ) : on utilise la procédure de **Glimm** (voir [3]). On prend un nombre aléatoire  $\omega_n \in [0, 1]$ , et on choisit

$$W_i^{n+1} = \begin{cases} W_{i-1}^{n+1,-}, & \text{si } x_{i-1/2} + \omega_n \Delta x < x_{i-1/2}^{n+1,-}, \\ W_i^{n+1,-}, & \text{si } x_{i-1/2}^{n+1,-} \leq x_{i-1/2} + \omega_n \Delta x \leq x_{i+1/2}^{n+1,-}, \\ W_{i+1}^{n+1,-}, & \text{si } x_{i-1/2} + \omega_n \Delta x > x_{i+1/2}^{n+1,-}, \end{cases} \quad (9)$$

– sinon, on utilise la **projection conservative**

$$W_i^{n+1} = W_i^{n+1,-} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\max(u_{i-1/2}, 0)(W_i^{n+1,-} - W_{i-1}^{n+1,-}) + \min(u_{i+1/2}, 0)(W_{i+1}^{n+1,-} - W_i^{n+1,-})).$$

## • Propriétés du schéma

Le schéma numérique ainsi construit vérifie les propriétés suivantes :

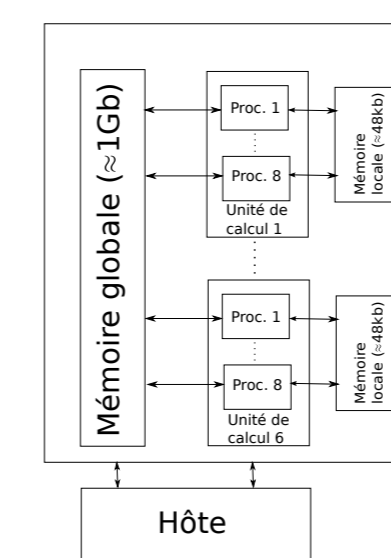
- en dehors de l'interface, le schéma est **entropique**. Il peut traiter des cas **d'apparition du vide**. Nous conjecturons que le schéma global est **statistiquement entropique et conservatif**;
- si  $u, v$  et  $p$  sont **constants** à l'instant initial, cette propriété est préservée au cours du temps ;
- si la fraction de masse de gaz  $\varphi$  ne prend que les deux valeurs **0** ou **1**, cette propriété est préservée à tout moment.

## Programmation sur GPU

### • Principe

#### • Matériel

Illustration d'un **Graphics Processing Unit** :



Le même programme peut être exécuté sur tous les processeurs **en même temps**.

#### • Moyen

**OpenCL** (Open Computing Language) est un logiciel nous permettant, grâce à un langage dérivé du C, d'exécuter notre programme sur GPU.

Virtuellement, il nous permet d'avoir autant d'unités de calcul et de processeurs que l'on souhaite.

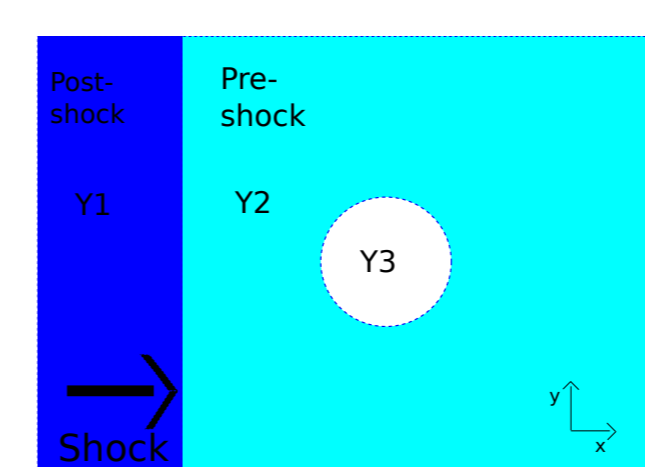
### • Algorithme

On décrit la méthode pour paralléliser le calcul sur le GPU.

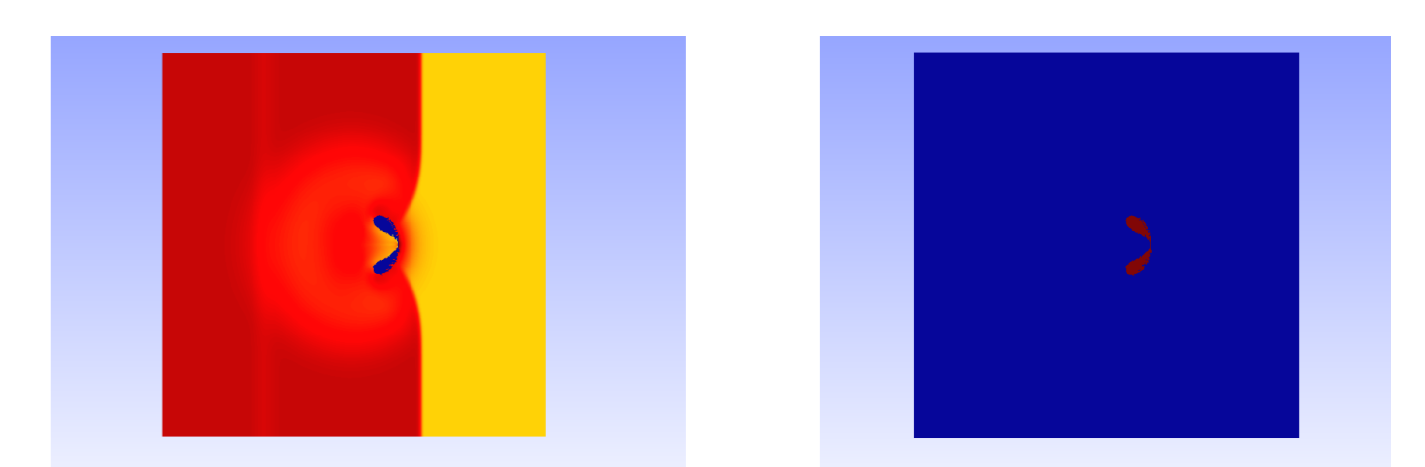
- À chaque ligne de notre domaine 2D on associe une unité de calcul (virtuelle) et à chaque cellule de la ligne, on associe un processeur (virtuel). Il calcule le bilan des flux et effectue la projection dans la direction  $x$  pour chaque unité de calcul.
- On "transpose" : on échange les composantes  $\rho u$  et  $\rho v$  de  $W$  et on réorganise les données de sorte que les accès mémoire soient coalescents suivant  $y$ .
- On calcule le bilan des flux et on effectue la projection dans la direction  $y$ . Grâce à la transposition, les accès mémoires sont optimaux.
- On transpose de manière à réorganiser les données pour la prochaine étape temporelle.

## Application

On considère un choc impactant une bulle d'air à la vitesse  $\sigma = 100 \text{ m.s}^{-1}$ .



Quantities	Y1	Y2	Y3
$\rho(\text{kg.m}^{-3})$	1384	1000	1
$u(\text{m.s}^{-1})$	27.8	0	0
$v(\text{m.s}^{-1})$	0	0	0
$p(\text{Pa})$	2.87e6	1e5	1e5
$\varphi$	0	0	1
$\gamma$	4.4	4.4	1.4
$\pi$	4.68e5	4.68e5	0



– Tracés de la densité  $\rho$  et de la fraction de masse de gaz  $\varphi$  au temps  $t = 0.0055 \text{ s}$  :

– Temps de calcul pour une grille de 256 par 256 et pour un temps final de 0.004 s :

	time (s)
AMD Phenom II x4 945 (1 core)	192
AMD Phenom II x4 945 (4 cores)	59
AMD Radeon HD5850	1.43
NVIDIA GTX 460	2.48
NVIDIA Geforce GTX470	0.93

### Bibliographie

- [1] F. BOUCHUT, *Nonlinear Stability of Finite Volume Methods for Hyperbolic Conservation Laws*, Birkhauser, 2004.
- [2] M. BACHMANN, P. HELLUY, H. MATHIS, S. MÜLLER, *Random Sampling Remap for Compressible Two-phase Flows*, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00546919/fr/>, 2010
- [3] C. CHALONS, F. COQUEL, *Computing material fronts with Lagrange-Projection approach*, HYP2010 Proc. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00548938/fr/>.