Mathématiques 2
Master Génie Pétrolier - M1
Année 2015 - 2016
Marc Artzrouni - Jonathan Jung

TP n° 5 : théorème central limite

Le but est d'illustrer le théorème central limite.

1 Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire X peut prendre les valeurs allant de 1 à 6. Le vecteur des probabilités associées est

$$proba = (0.32, 0.05, 0.12, 0.15, 0.18, 0.18)^T.$$

Cette variable aléatoire représente le nombre d'ouvriers présents un jour donné sur une plate-forme pétrolière.

1. Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X.
2. À l'aide de la fonction `sample`, générer $n = 50$ réalisations de la variable aléatoire X.
3. Comparer la moyenne empirique $\bar{X}$ et la moyenne théorique $\mu = \mathbb{E}(X)$. Que se passe-t-il lorsque l'on augmente la taille n de l'échantillon ?
4. Lancer plusieurs fois votre programme et constater que vous n'obtenez pas exactement la même valeur pour $\bar{X}$: $\bar{X}$ est une variable aléatoire.
5. Générer maintenant $m = 20$ valeurs de $\bar{X}$. Appeler Xbarv le vecteur des m valeurs. Pour chaque valeur de $\bar{X}$ on utilisera un échantillon de $n = 5$ réalisations de la variable aléatoire X.
6. Tracer un histogramme de $Xbarv$. Que devient l'histogramme lorsque l'on augmente n ?
7. D'après le théorème central limite, nous savons que $\bar{X}$ suit une loi normale de moyenne $\mu = \mathbb{E}(X)$ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Sur le graphique de l'histogramme, ajouter à l'aide de la commande `curve`, la densité de la loi normale (commande `dnorm`) de moyenne μ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
8. Faire varier n et observer le résultat.

2 Variable aléatoire continue

Nous allons maintenant illustrer le théorème central limite pour le cas où X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{3}$.

1. À l'aide de la fonction `rexp`, générer $n = 50$ réalisations de la variable aléatoire X.
2. Comparer la moyenne empirique $\bar{X}$ et la moyenne théorique $\mu = \mathbb{E}(X)$.
3. Lancer plusieurs fois votre programme et constater que vous n'obtenez pas exactement la même valeur pour $\bar{X}$: $\bar{X}$ est une variable aléatoire.
4. Générer maintenant $m = 20$ valeurs de $\bar{X}$. Appeler $Xbarv$ le vecteur des m valeurs. Pour chaque valeur de $\bar{X}$ on utilisera un échantillon de $n = 50$ réalisations de la variable aléatoire X.
5. Tracer un histogramme de $Xbarv$. Que devient l'histogramme lorsque l'on augmente n ?
6. D'après le théorème central limite, nous savons que $\bar{X}$ suit une loi normale de moyenne $\mu = \mathbb{E}(X)$ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Sur le graphique de l'histogramme, ajouter à l'aide de la commande `curve`, la densité de la loi normale de moyenne μ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.