

Mathématiques 2

Master Génie Pétrolier - M1

Année 2015 - 2016

Marc Artzrouni - Jonathan Jung



TD n° 2 : Théorème central limite, intervalle de confiance

Exercice 1. On mesure la porosité X d'un échantillon de n roches. On ne connaît ni l'espérance μ ni l'écart type σ de X .

- (a) Rappeler quelle serait approximativement la distribution de la moyenne empirique \bar{X} quand l'échantillon est suffisamment grand ($n > 30$).
- (b) Donner un intervalle de confiance pour μ au seuil $\alpha = 0.9$, $\alpha = 0.95$ et $\alpha = 0.99$
- (c) Exprimer la longueur L_α de l'intervalle de confiance. Que se passe-t-il si la taille n de l'échantillon augmente ?
- (d) Quelle remarque peut-on faire sur les rapports $\frac{L_{0.95}}{L_{0.90}}$ et $\frac{L_{0.99}}{L_{0.95}}$?
- (e) Application numérique : donnez les intervalles de confiance au seuil $\alpha = 0.9$, $\alpha = 0.95$ et $\alpha = 0.99$ pour un échantillon de taille 20 et une somme des observations de $S_0 = 683.86$ et une somme des carrés de $S_2 = 23731.73$.
- (f) En fait un échantillon de taille 20 n'est pas vraiment suffisamment grand pour utiliser les constantes universelles de la question b) pour calculer l'intervalle de confiance.
 - i. Avec un petit échantillon rappelez l'hypothèse du cours qu'il faut faire pour pouvoir calculer un intervalle de confiance au moins approximatif.
 - ii. En supposant que l'hypothèse de f)i) soit satisfaite exprimez les nouveaux intervalles de confiance avec la fonction `qt` de `R` dont vous donnerez les arguments numériques. Donnez ensuite les valeurs numériques de ces intervalles. Comparez les valeurs fournies par la fonction `qt` aux valeurs des constantes universelles utilisées en 1)b). Comparez les longueurs des nouveaux intervalles de confiance avec celles trouvées en e).
 - iii. Que serait le `qt` si on voulait un intervalle de confiance à 80% ?
- (g) Revenons au cadre d'un n grand, redonnez l'expression en fonction de n de la longueur L_{95} de l'intervalle de confiance à 95% trouvée en b). On voit que la longueur de l'intervalle diminue avec n . Écrivez alors l'équation nécessaire pour déterminer la taille n^* de l'échantillon nécessaire pour que la longueur soit la moitié de la longueur obtenue en f)ii). Calculez ce n^* et dire s'il est alors bien suffisamment grand pour appliquer la formule "grand échantillon".