Simulation stochastique 1
Licence MIASHS - L3
Année 2015 - 2016
Jonathan Jung - Sophie Mercier

TP n° 3 : Simulations de variables aléatoires

Le second TP est dédié à la simulation de variables aléatoires discrètes et continues.

Exercice 1. (a) Soit X_1, ..., X_n des v.a.r. de Bernoulli i.i.d. de paramètre p donné. Déterminer un intervalle de confiance (asymptotique) pour $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ à 95%.

(b) Écrire une fonction Scilab qui simule n réalisations x_1, ... , x_n de v.a.r. de Bernouilli i.i.d. de paramètre p et qui rend la moyenne $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ainsi que les bornes (inf et sup) de l'intervalle de confiance pour m à 95%.
La syntaxe de la fonction doit être la suivante :

$$[m, inf, sup] = moyenne\_Bernoulli(n; p)$$

Indiquer les valeurs obtenues pour $n = 104$ et $p = 0.7$.

(c) Donner la longueur de l'intervalle de confiance pour m à 95% lorsque $p = 0.7$ et $n = 10^i$ ($i = 1, ..., 7$). Que remarque-t-on ?

(d) Déterminer la valeur de n pour que la longueur de l'intervalle soit de 10^{-3} et donner le résultat obtenu avec votre fonction *moyenne_Bernoulli* pour cette valeur de n.

(e) En écrivant un script, répéter les n simulations de la question b. On obtient ainsi $(m_1, ..., m_N)$ et tracer sur un même graphique les m_i, la valeur de p et les bornes de l'intervalle de confiance calculées précédemment. Qu'observe-t-on ? Expliquer les résultats obtenus.

Exercice 2. Simulation d'une v.a.r de loi uniforme.

(a) Proposer une méthode de simulation d'une v.a.r. X de loi uniforme sur $\{2, 3, 4, 5\}$. (On utilisera une méthode similaire à celle vue en cours pour la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

(b) On considère N réalisations $(x_1, ..., x_N)$ indépendantes d'une v.a.r. X de loi uniforme sur $\{2, 3, 4, 5\}$. Donner une estimation de $P(X = i)$ pour $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ à partir de $(x_1, ..., x_N)$.

(c) Écrire une fonction Scilab qui simule N réalisations $(x_1, ..., x_N)$ indépendantes d'une v.a.r. X de loi uniforme sur $\{2, 3, 4, 5\}$ et qui rend la simulation ainsi que les estimations ($Pesti$) de $P(X = i)$ pour $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. La syntaxe de la fonction doit être la suivante :

$$[x, Pesti] = var\_uniforme(N)$$

Pour $N = 10^3$, 10^4, 10^5, 10^6 donner les valeurs estimées des probabilités $P(X = i)$. Que remarquez-vous ?

(d) Tester la validité de votre simulation en utilisant la fonction *test_vard*. Conclure.

Exercice 3. Simulation d'une v.a.r. de loi géométrique

(a) Première méthode :

i. Écrire une fonction Scilab qui simule une réalisation d'une v.a.r. X de loi géométrique de paramètre p (notée $G(p)$) en utilisant le fait que X représente le premier temps de succès lorsque l'on effectue des expériences de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre p.
La syntaxe de la fonction doit être la suivante :

$$[x] = var\_geom1(p)$$

ii. Écrire une fonction Scilab qui simuler n revitalisations $x_1, ..., x_n$ de v.a.r. i.i.d. X_1, ..., X_n de loi géométrique de paramètre p par la même méthode. La syntaxe de la fonction doit être la suivante :

$$[x] = var\_geom1\_multi(n, p)$$

iii. Utiliser la fonction $test\_vard$ pour valider votre fonction en prenant $p = 0.4$ et $n = 10^4$.

iv. calculer $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. Pour $n = 103$, 104, 105. Qu'observe-t-on ? Pourquoi ?

(b) Deuxième méthode :

i. Soit X une v.a.r. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$. Montrer que $Y = [X]$ (plus petit nombre entier supérieure ou égal à X : fonction `ceil` en Scilab) suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire une méthode pour simuler une v.a.r. de loi géométrique de paramètre p.

ii. Écrire une fonction Scilab qui simuler N réalisations $(y_1, ..., y_N)$ d'une v.a.r. Y de loi $\mathcal{G}(p)$ à l'aide de cette méthode. La syntaxe de la fonction doit être la suivante :

$$[x] = var\_geom2\_multi(n, p)$$

iii. Utiliser la fonction `test_vard` pour valider votre fonction en prenant $p = 0.4$ et $n = 10^4$.

(c) Comparer les temps d'exécution des deux méthodes pour $N = 10^5$.

Exercice 4. Simulation d'une v.a.r. de loi poisson

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. On définit la variable aléatoire entière Y par :

$$Y = \inf\left(n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n+1} X_k > 1\right).$$

(a) Déterminer la loi de Y .

Indication : on rappelle que $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi d'Erlang $\Gamma(n, \lambda)$ de densité

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

(b) En déduire une méthode pour simuler une v.a.r. Y suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda(\mathcal{P}(\lambda))$.

(c) Écrire une fonction Scilab permettant de calculer $P(Y = i)$.

La syntaxe de la fonction doit être la suivante :

$$[p] = poisson(\lambda, i).$$

(d) Écrire une fonction Scilab qui simule N réalisations $(x_1, ..., x_N)$ d'une v.a.r. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ à l'aide de cette méthode.

La syntaxe de la fonction doit être la suivante :

$$x = var\_poisson\_multi(\lambda, N)$$

Utiliser la fonction `test_vard` pour valider votre fonction en prenant $\lambda = 0.7$ et $N = 10^5$. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 5. Simulation d'une v.a.r. de loi continue

(a) Soient Y_1 et Y_2 deux v.a.r. de densités respectives f_1 et f_2. Soit Z une v.a.r. de loi $\mathcal{B}(p)$ indépendante de Y_1 et Y_2. On pose $X = ZY_1 + (1 - Z)Y_2$. Déterminer la loi de X.

(b) En déduire un algorithme pour simuler une réalisation d'une v.a.r. de densité

$$f(x) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1 - p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$$

pour $x \geq 0$ (où $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.)

(c) Écrire une fonction Scilab qui simule N réalisations $(x_1, ..., x_N)$ d'une v.a.r. suivant la loi définie à la question précédente. La syntaxe de la fonction doit être la suivante :

$$x = var\_loi\_multi(lambda1, lambda2, p, N)$$

Utiliser la fonction `test_varc` pour valider votre fonction en prenant $\lambda_1 = 0.7$, $\lambda_2 = 3$, $N = 10^3$ et $p = 0.4$. Commenter les résultats obtenus.