Simulation stochastique 1
Licence MIASHS - L3
Année 2015 - 2016
Jonathan Jung - Sophie Mercier

TP n° 2 : Suites pseudo-aléatoires

Le second TP est dédié à générer des suites pseudo-aléatoire et à étudier si elles sont bien aléatoires.

1 Générateurs congruentiels linéaires

Nous allons voir comment introduire de l'aléatoire numériquement. On va dans un premier temps générer des nombres aléatoires dans $[0,1[$.

1. Écrire une fonction Scilab qui prend comme argument a, c, m , $y0$ et N et qui retourne les n premiers termes du générateur congruentiels linéaire de module m, de multiplicateur a, d'incrément m et de graine $y0$.
   La syntaxe de la fonction doit être la suivante :
   $$[y] = congruencial\_generator(a, c, m, y0, n)$$
2. Afficher les 10 premières valeurs de la suite pseudo-aléatoire de module $m = 2^{31}$, de multiplicateur $a = 843314861$, d'incrément $c = 453816693$ et de graine $y_0 = 1$. Est-ce que cette suite semble aléatoire ?
3. On souhaite maintenant tester la qualité de notre générateur de variables aléatoires. Pour cela, nous allons étudier deux tests : le test spectral qui consiste à tracer les couples $(y_{2i}, y_{2i+1})_i$ à l'intérieur du carré unité $[0,1[\times[0,1[$ et le test consistant à comparer la cumulative numérique à la fonction de répartition exacte.
   (a) Tracer les couples $(y_{2i}, y_{2i+1})_i$ pour $n = 10\,000$, $m = 2^{31}$, $a = 843314861$, $c = 453816693$, $y_0 = 1$. Ce générateur satisfait-il le test spectral ?
   (b) Un utilisant la fonction`histplot` de Scilab, tracer l'histogramme de y où l'on prendra 10 classes. Comparer l'histogramme la fonction densité d'une loi uniforme sur $[0,1[$.
   (c) Tracer les couples $(y_{2i}, y_{2i+1})_i$ pour $n = 10\,000$, $m = 2^{31} - 1$, $a = 31$, $c = 0$, $y_0 = 1$. Ce générateur satisfait-il le test spectral ?
   (d) Tracer l'histogramme de y où l'on prendra 10 classes. Comparer l'histogramme la fonction densité d'une loi uniforme sur $[0,1[$.
4. Utiliser maintenant la fonction Scilab `rand` pour générer un vecteur colonne constitué de 10 nombres aléatoires dans $[0,1[$.
   Lancez plusieurs fois la commande, que se passe-t-il ?
5. La fonction `rand` de Scilab utilise également des générateurs congruentiels linéaires. À l'aide de la commande `rand("seed")`, affichez la graine de la suite aléatoire que vous avez obtenue à la question précédente.
6. Choisissez maintenant pour graine $y0 = 1$ dans la fonction `rand` à l'aide de la commande `rand("seed",y0)`. `rand` et comparer le résultat obtenu à celui de la question 2.

2 Exercice du cours

Un supermarché vend des yaourts 1€ chacun. Ce supermarché achète ces yaourts pour 0.40€ chacun à une entreprise qui les livre quotidiennement. Les statistiques montrent que la demande journalière D suit une loi uniforme entre 800 yaourts/jour et 1400 yaourts/jour. Les yaourts sont livrés chaque matin et le surplus de yaourts est jeté à la fin de la journée.
Combien faut-il commander de yaourts chaque matin pour maximiser le profit ?
Nous allons résoudre ce problème numériquement.
Pour cela, notons q le nombre de yaourts livrés chaque matin. Nous cherchons la valeur q^* de q telle que le profit soit maximal.

1. Exprimer le profit P en fonction de q et D.
2. Écrire une fonction Scilab qui simule n réalisations d_1 , ... , d_n de v.a.r. D de loi uniforme sur $[800, 1400[$.
   La syntaxe de la fonction doit être la suivante :
   $$[d] = Uniforme(a, b, n)$$
   où dans notre cas a vaudra 800, b vaudra 1400 et n est la taille de l'échantillon.
3. Écrire une fonction Scilab qui calcule le profit p_i associé à d_i et à une valeur de q.
   La syntaxe de la fonction doit être la suivante :
   $$[p] = profit(d, q)$$
4. Pour $q = 800$ et $n = 1\,000$, calculer le profit $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ associé à $(d_i)_{1\leq i\leq n}$. Calculer ensuite le profit moyen $\bar{p}$ de $(p_i)_{1\leq i\leq n}$.
5. Répéter ce processus pour différente valeur de q et trouver q^*.
   Indication : on pourra prendre `q=800:1:1400` puis tracer la courbe du profit moyen $\bar{p}(q)$ en fonction de q.
6. Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu en cours.