**Intelligence numérique**
*Mathématiques pour la géométrie - M2*
*Année scolaire 2014 - 2015*
*Jung Jonathan/Pierre Alliez*

# TD 1

**Exercice 1 : Polygones**
Dessiner des polygones convexes, concaves, croisés, étoilés, isocèles (avec au moins un axe miroir), rectangles (avec un angle droit), birectangles, trirectangles, réguliers. Est-ce qu'un triangle peut-être birectangle ?

**Exercice 2 : Triangulation d'un polygone convexe**
Montrer que la triangulation d'un polygone convexe est triviale et se calcule en un temps linéaire. Proposer un algorithme.

**Exercice 3 : Angles d'un polygone convexe**
Que vaut la somme des angles d'un polygone convexe ? démontrer.

**Exercice 4 : Centre de masse d'un polygone**
Comment calculer le centre de masse d'un triangle ? d'un polygone ? avec une densité uniforme, puis non-uniforme.

**Exercice 5 : Polygones non-convexes**
Un polygone simple découpe le plan en deux parties : l'intérieur et l'extérieur du polygone. Dessiner un polygone convexe et un polygone non-convexe. Quelles sont les propriétés de leurs cordes ? Montrer qu'une triangulation d'un polygone à n côtés a $(n-3)$ diagonales et $(n-2)$ triangles.

**Exercice 6 : Triangulation de polygones convexes**
Dessiner des polygones convexes simples et sans trou d'ordre croissant : 3,4,5,6,7 etc. Compter le nombre de triangulations possibles pour chaque ordre $d$ et relier ces nombres aux nombres de Catalan. Les nombres de Catalan sont des entiers naturels qui se rencontrent souvent dans les problèmes de combinatoire. Ils forment une suite dont le terme d'indice $n$, appelé nième nombre de Catalan est défini par

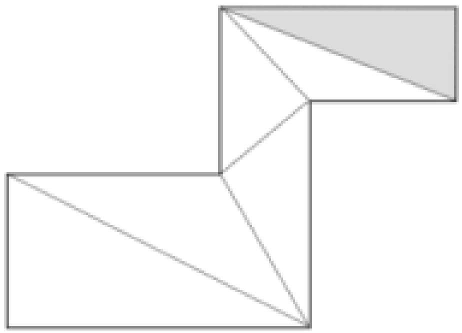
$$C_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad C_n = \frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Nous admettrons que les nombres de Catalan satisfont la relation de récurrence

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}.$$

**<u>Exercice 7 :</u> Autour d'une table**
Dessiner le scénario suivant : un nombre de pair $2n$ de personnes sont assis autour d'une table. De combien de façons différentes ces personnes peuvent ils serrer la main d'une autre personne de la table sans jamais que les bras se croisent ? (Chaque personne serre uniquement la main droite d'une autre personne.) Dessiner les arrangements correspondants.

**<u>Exercice 8 :</u> Triangulation de polygones simples**
Une manière de trianguler un polygone simple est d'utiliser l'hypothèse que tout polygone simple sans trou possède au moins deux "oreilles". Une oreille est un triangle avec deux arêtes appartenant à la frontière du polygone, et la troisième située à l'intérieur du polygone. L'algorithme consiste à trouver une telle oreille, à la retirer du polygone, ce qui donne un nouveau polygone qui répond toujours aux conditions, et à répéter l'opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul triangle. Cet algorithme est simple à implanter, mais pourquoi est-il sousoptimal ?



**<u>Exercice 9 :</u> Triangulation de polygones avec des trous**
A partir de la triangulation de Delaunay contrainte, proposer un algorithme qui triangule un polygone avec des trous.
**<u>Exercice 10 :</u> Enveloppe convexe et barycentres**
Comment peut-on définir l'enveloppe convexe d'un ensemble de points à partir de barycentres ?

**<u>Exercice 11 :</u> Enveloppe convexe et complexité**
Décrire les différences entre la marche de Jarvis et le parcours de Graham. Dans quels cas favorise-t-on l'un ou l'autre algorithme ?

**<u>Exercice 12 :</u> Localisation dans un convexe**
On considère un polygone convexe $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ et l'on veut effectuer des requêtes : on propose un point q et l'on doit répondre si q est à l'intérieur ou à l'extérieur de $P$.
1) Expliquer comment répondre à cette question pour un seul point $q$. Quel est la complexité de votre algorithme.

2) Proposer un prétraitement de P pour répondre plus rapidement à une requête. Quel est la complexité du prétraitement, quel est la complexité du traitement d'une requête.

**Exercice 13 : Graphes**

A partir de la relation d'Euler : $V + F - E = 2C - B$ ($V$ est le nombre de sommets, $F$ le nombre de faces, $E$ le nombre d'arêtes, $C$ le nombre de composantes connexes et $B$ le nombre de bords), montrer que pour un maillage triangulaire $E = O(F) = O(V)$ et la moyenne des degrés des sommets du maillage tend vers 6 quand le nombre de sommets tend vers l'infini.

**Exercice 14 : Triangulation de Delaunay**

Dans un triangle aigu les trois angles sont inférieurs à 90 degrés. Un triangle de Delaunay $ABC$ est aigu si et seulement si son sommet dual de Voronoi (le centre de son cercle circonscrit) est contenu dans l'intérieur de $ABC$. A partir de la propriété de l'arc capable montrer qu'une triangulation dont tous les triangles sont aigus est nécessairement la triangulation de Delaunay des sommets de ces triangles.