Université de Pau et des Pays de l'Adour **Année 2019-2020**
Département de Mathématiques
M1-Génie Pétrolier - Analyse de données

TD-4 : Quelques exercices un peu plus théoriques

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de densité f définie pour tout nombre réel x, par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x}, & \text{si } -e \leq x \leq -1, \\ x + 1 - a, & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où a est un nombre réel.

1. Calculer a.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

Exercice 2. Soit α un paramètre réel strictement positif et f l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2} \exp(-\alpha x), & \text{si } x \geq 0, \\ \dfrac{\alpha}{2} \exp(\alpha x), & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour densité f. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = |X|$?
3. En déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire réelle uniforme continue sur $[0; 1]$. La relation

$$Y = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - X)$$

où α est un paramètre réel strictement positif. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

Exercice 4. Un cinéma comporte deux salles contenant chacune n places. N personnes se présentent à l'entrée de ce cinéma. On admet que les choix des spectateurs sont indépendants les uns des autres et qu'un spectateur quelconque a une chance sur deux d'aller dans la première salle.

1. On note X_k la variable aléatoire correspondant au choix du spectateur k. Quelle est la loi de X_k ?
2. Exprimer la variable aléatoire S correspondant au nombre de spectateurs désirant aller voir le film de la première salle en fonction des X_k ? Faîtes de même avec la deuxième salle.
3. Quelle est la loi de la variable aléatoire S ? Pour cela, quelle hypothèse devons-nous faire sur les X_k ?

4. On note p la probabilité qu'au moins un spectateur ne puisse pas voir le film qu'il ait choisi. Calculer p en fonction de n et N.

5. Utiliser maintenant le théorème central limite pour calculer p.

6. Comment le constructeur aurait-il dû choisir n si on sait que $N = 1000$ et si on veut que $p \leq 0.1$?