Un schéma équilibre pour un écoulement de deux fluides compressibles en section variable

Jonathan Jung, Philippe Helluy

IRMA, Université de Strasbourg

16 juin 2011

Rencontre d'équipes: EDP -IRMA, Strasbourg et EDP - LMIA, Mulhouse

Outline

Modèle

On considère les équations d'Euler en section variable:

$$
\begin{aligned}
\partial_t(A\rho) + \partial_x(A\rho u) &= 0, \\
\partial_t(A\rho u) + \partial_x(A(\rho u^2 + p)) &= p\partial_x A, \\
\partial_t(A\rho E) + \partial_x(A(\rho E + p)u) &= 0, \\
\partial_t(A\rho\varphi) + \partial_x(A\rho\varphi u) &= 0, \\
\partial_t A &= 0,
\end{aligned}
$$

où A est la section variable, ρ la densité, u the vitesse, p satisfait la loi de pression des gazs raides, E l'energie totale et φ la fraction de masse de gaz.

Schéma numérique

- On propose un schéma de volumes finis avec une approche Arbitrary Lagrangian Eulerian, la frontière $x^n_{i+1/2}$ peut se déplacer à la vitesse $v^n_{i+1/2}$ entre t_n et t_{n+1}:

$$x^{n+1,-}_{i+1/2} = x^n_{i+1/2} + \tau v^n_{i+1/2}. \tag{1}$$

- On définit un flux ALE:

$$F(W_L, W_R, v^\pm) := F(W(W_L, W_R, v^\pm)) - vW(W_L, W_R, v^\pm) \tag{2}$$

où $W(W_L, W_R, v^\pm)$ est obtenu à l'aide d'un solveur de Riemann approché décrit plus loin.

Schéma numérique

Si $v^n_{i+1/2} \leq 0$ et $v^n_{i-1/2} \geq 0$, le schéma ALE est:

$$\begin{aligned} & \Delta x_i^{n+1} W_i^{n+1,-} - \Delta x_i^n W_i^n + \\ \tau \left(F(W_i^n, W_{i+1}^n, v_{i+1/2}^{n,-}) - F(W_{i-1}^n, W_i^n, v_{i-1/2}^{n,+}) \right) & = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Pour tenir compte de la section variable, si $v^n_{i+1/2} > 0$ on doit ajouter le terme suivant à gauche de l'équation précédente

$$\tau \left(F(W_i^n, W_{i+1}^n, 0^-) - F(W_i^n, W_{i+1}^n, 0^+) \right), \tag{4}$$

et si $v^n_{i-1/2} < 0$ on ajoute:

$$\tau \left(F(W_{i-1}^n, W_i^n, 0^-) - F(W_{i-1}^n, W_i^n, 0^+) \right). \tag{5}$$

Solveur de Riemann approché

- Si on n'est pas à l'interface: comme les invariants de Riemann associés à l'onde stationnaire sont φ, $s = (p + \pi(\varphi))\rho^{-\gamma(\varphi)}$, $Q = \rho A u$ et $H = E + \frac{p}{\rho}$, on utilise un **schéma VFRoe [1] en** $Z = (A, \varphi, s, Q, H)^T$.
- Si on est à l'interface: on utilise un solveur de Riemann exact en $(\varrho, u, p, \varphi)^T$ pour calculer u et p qui ne présentent pas de saut à la discontinuité de contact.

Rééchantillonnage

On retourne à la grille d'origine par la procédure de Glimm [2]. On construit une suite aléatoire $\omega_n \in [0,1[$, puis on prend:

$$W_i^{n+1} = \begin{cases} W_{i-1}^{n+1,-}, & si \quad \omega_n < \frac{\tau_n}{\Delta x_i} \max(v_{i-1/2}^n, 0), \\ W_i^{n+1,-}, & si \quad \frac{\tau_n}{\Delta x_i} \max(v_{i-1/2}^n, 0) \leq \omega_n \leq 1 + \frac{\tau_n}{\Delta x_i} \min(v_{i+1/2}^n \\ W_{i+1}^{n+1,-}, & si \quad \omega_n > 1 + \frac{\tau_n}{\Delta x_i} \min(v_{i+1/2}^n, 0). \end{cases} \tag{6}$$

Propriétées du schéma

Le schéma construit verifie les propriétées suivantes:

- il est well-balanced dans le sens où il préserve tous les états stationnaires (c.à.d. les données initiales pour lesquelles les quantités φ, s, Q, H sont constants);
- si à l'instant initial la fraction de masse φ ne prend que les deux valeurs 0 ou 1,cette propriété est preservée à tout moment.

Application à la bulle

On valide notre modèle en simulant les oscillations d'une bulle sphérique de gaz dans l'eau.
Les données initiales sont les suivantes:

Quantités	Gauche	Droit
ρ	$0.92\ kg.m^{-3}$	$1000\ kg.m^{-3}$
u	$0\ m.s^{-1}$	$0\ m.s^{-1}$
p	$72567.68\ Pa$	$10^5\ Pa$
φ	1	0
γ	1.4	3
π	$0\ Pa$	$733333.33\ Pa$

Application à la bulle

On trace le rayon de la bulle que l'on compare au modèle EDO de Keller-Miksis [3], on obtient: