



Résolution de l'équation des ondes avec taux de vide à bas nombre de Mach

Jonathan Jung (LRC-Manon, Paris 6)

Collaborateurs :

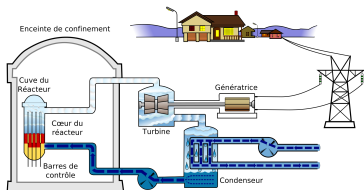
Stéphane Dellacherie (CEA, Saclay & LRC-Manon)

Pascal Omnes (CEA, Saclay & Université Paris 13)

Journée de lancement du LRC Manon II, 12 juin 2014

Cas d'étude :

- Cœur de réacteur nucléaire.



Propriétés de l'écoulement :

- Écoulement diphasique eau-air.
- L'air est compressible.
- Bas nombre de Mach

$$|u| \ll c$$

$$\Leftrightarrow M := \frac{|u|}{c} \ll 1.$$

Objectif :

- Développer un schéma numérique "compressible" se comportant bien à bas nombre de Mach.

Équation des ondes avec taux de vide

- Équations d'Euler barotrope adimensionnées avec taux de vide

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha\rho) + \nabla \cdot (\alpha\rho\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\alpha\rho\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\alpha\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{\alpha}{M^2} \nabla p = 0, \end{cases}$$

où $\alpha \in [\alpha_{\min}, 1]$ connu, où $\alpha_{\min} > 0$ est une constante indépendante de M .

- Changement de variables $\rho := \rho_\star \left(1 + \frac{M}{a_\star} r\right)$, avec $\begin{cases} a_\star^2 = p'(\rho_\star) \\ \frac{M}{a_\star} r \ll 1. \end{cases}$
+ Linéarisation autour de $(\rho_\star = cst, \mathbf{u}_\star = 0)$:

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha r) + \frac{a_\star}{M} \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\alpha \mathbf{u}) + \frac{a_\star}{M} \alpha \nabla r = 0. \end{cases}$$

- Noyau de l'opérateur spatial : **espace incompressible**

$$\mathcal{E}_\alpha := \left\{ q = (r, \mathbf{u})^T \in L_\alpha^2(\mathbb{T})^{1+d} \mid \nabla r = 0 \text{ et } \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0 \right\}.$$

Théorème

Il est possible de construire une décomposition de Hodge sur les espaces à poids

$$\mathcal{E}_\alpha \oplus \mathcal{E}_\alpha^\perp = L_\alpha^2(\mathbb{T})^{1+d},$$

où l'espace acoustique \mathcal{E}_α^\perp est donné par

$$\mathcal{E}_\alpha^\perp = \left\{ q = (r, \mathbf{u})^T \in L_\alpha^2(\mathbb{T})^{1+d} \mid \int_{\mathbb{T}} r \alpha dx = 0 \text{ et } \exists \phi \in H_\alpha^1(\mathbb{T}), \mathbf{u} = \nabla \phi \right\}$$

Proposition

Si q est solution de l'équation des ondes avec taux de vide et si q a pour condition initiale q^0 , nous avons

- $\forall q^0 \in \mathcal{E}_\alpha, \quad q(t \geq 0) \in \mathcal{E}_\alpha;$
- $\forall q^0 \in \mathcal{E}_\alpha^\perp, \quad q(t \geq 0) \in \mathcal{E}_\alpha^\perp.$

Objectifs

Nous allons étudier le comportement du schéma de Godunov vis-à-vis des éléments de \mathcal{E}_α .

- Est-ce qu'au niveau discret le schéma de Godunov permet de préserver un élément $q^0 \in \mathcal{E}_\alpha$
 - sur maillage triangulaire ?
 - sur maillage cartésien ?

- Est-ce que le schéma de Godunov satisfait

$$\|q^0 - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L^2_\alpha} = O(M) \Rightarrow \forall t \leq ?, \|q - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L^2_\alpha}(t) = O(M),$$

où \mathbb{P}_α est la projection orthogonale sur \mathcal{E}_α ?

Schéma de Godunov

Schéma de Godunov sur maillage triangulaire ou cartésien $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq N}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\alpha r)_i + \frac{a_*}{2M} \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{\Gamma_{ij} \subset \partial\Omega_i} |\Gamma_{ij}| (\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{ij} = 0, \\ \frac{d}{dt}(\alpha \mathbf{u})_i + \frac{a_*}{2M} \frac{\alpha_i}{|\Omega_i|} \sum_{\Gamma_{ij} \subset \partial\Omega_i} |\Gamma_{ij}| r_{ij} \mathbf{n}_{ij} = 0, \end{cases}$$

où $(r_{ij}, (\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{ij})$ est solution d'un problème du Riemann¹ 1D dans la direction \mathbf{n}_{ij}

$$\begin{cases} \alpha_{ij} \partial_t r_\xi + \frac{a_*}{M} \partial_\xi ((\alpha u)_\xi) = 0, \\ \partial_t ((\alpha u)_\xi) + \frac{a_*}{M} \alpha_{ij} \partial_\xi r_\xi = 0, \\ (r_\xi, (\alpha u)_\xi) (t=0, \xi) = \begin{cases} (r_i, (\alpha \mathbf{u})_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) & \text{si } \xi < 0, \\ (r_j, (\alpha \mathbf{u})_j \cdot \mathbf{n}_{ij}) & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

1. S. Dellacherie, P. Omnes, On the Godunov scheme applied to the variable cross-section linear equation. FVCA6, (4) :313–321, 2011.

Schéma numérique

- Schéma de Godunov sur maillage triangulaire ou cartésien
(Ω_i) $_{1 \leq i \leq N}$ [DO11]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\alpha r)_i + \frac{a_\star}{2M} \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{\Gamma_{ij} \subset \partial\Omega_i} |\Gamma_{ij}| \left[((\alpha \mathbf{u})_i + (\alpha \mathbf{u})_j) \cdot \mathbf{n}_{ij} + \alpha_{ij}(r_i - r_j) \right] = 0, \\ \frac{d}{dt}(\alpha \mathbf{u})_i + \frac{a_\star}{2M} \frac{\alpha_i}{|\Omega_i|} \sum_{\Gamma_{ij} \subset \partial\Omega_i} |\Gamma_{ij}| \left[r_i + r_j + \frac{\kappa}{\alpha_{ij}} ((\alpha \mathbf{u})_i - (\alpha \mathbf{u})_j) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right] \mathbf{n}_{ij} = 0 \end{cases}$$

avec $\kappa = 1$.

- Nous l'écrivons sous la forme

$$\frac{d}{dt}(\alpha q_h) + \frac{\mathbb{L}_{\kappa, \alpha}^h}{M}(q_h) = 0,$$

où $q_h = (r_i, \mathbf{u}_i)^T$.

Outils et condition initiale

Outils :

- *Maillage* : Logiciel SALOME.
- *Code* : Librairie C++ CDMATH (en développement au CEA).

Condition initiale :

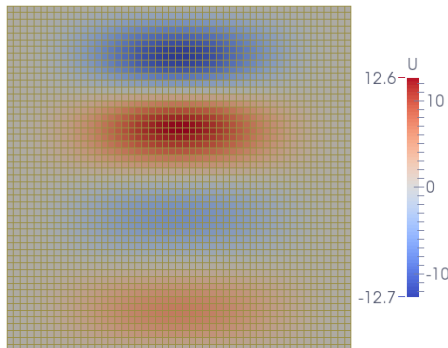
- Pour tout $(x, y) \in [0, 1[\times [0, 1[$,
 - $\alpha(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin^2(\pi x) \cos^2(\pi x)$,
 - $r^0(x, y) = 1$,
 - $(\alpha \mathbf{u})^0 = \nabla \times \psi$ où $\psi(x, y) = \frac{2}{\pi} (\sin^2(\pi x) \sin^2(2\pi y) - \frac{1}{4})$.

Nous avons

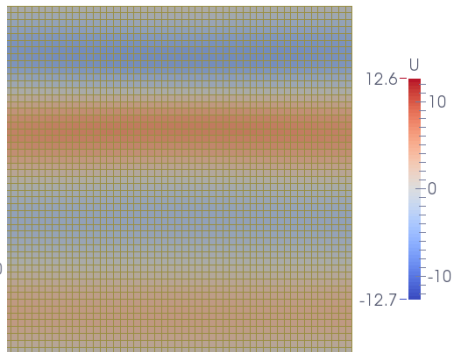
$$\begin{cases} \nabla r^0 = 0 \\ \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}^0) = \nabla \cdot (\nabla \times \psi) = 0 \end{cases} \Rightarrow q^0 = (r^0, \mathbf{u}^0)^T \in \mathcal{E}_\alpha.$$

Maillage cartésien avec $\kappa = 1$:

- Condition initiale :



- Après 1000 itérations :

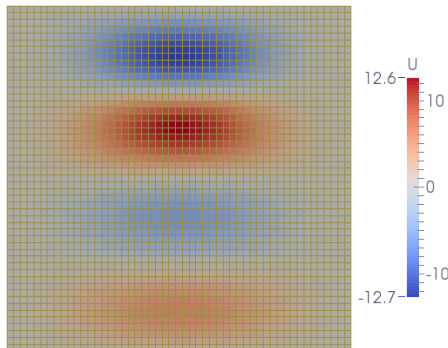


Proposition ($\kappa = 1$)

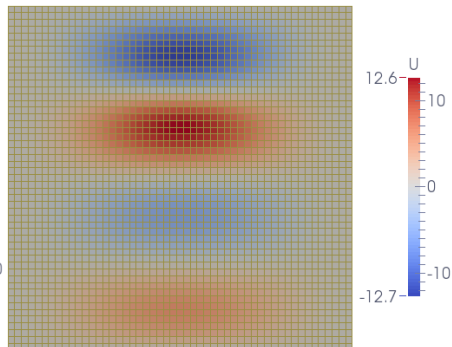
$$\ker \mathbb{L}_{\kappa=1,\alpha}^h \subsetneq \mathcal{E}_\alpha^{h,\square}.$$

Maillage cartésien avec $\kappa = 0$:

- Condition initiale :



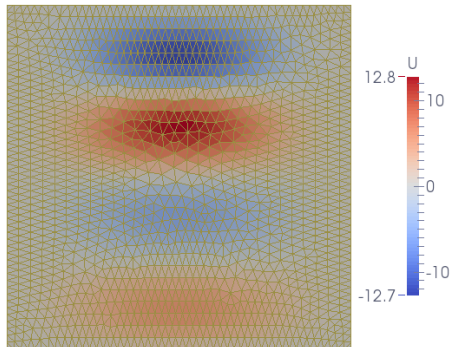
- Après 1000 itérations :

Proposition ($\kappa = 0$)

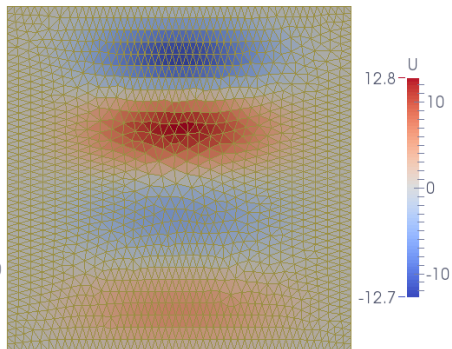
$$\ker \mathbb{L}_{\kappa=0, \alpha}^h = \mathcal{E}_{\alpha}^{h, \square}.$$

Maillage triangulaire avec $\kappa = 1$:

- Condition initiale :



- Après 1000 itérations :



Proposition ($\kappa = 1$)

$$\ker \mathbb{L}_{\kappa=1, \alpha}^h = \mathcal{E}_{\alpha}^{h, \Delta}.$$

L^2_α -stabilité sur maillages triangulaire et cartésien

Proposition

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_i |\Omega_i| \alpha_i (r_i^2 + |\mathbf{u}_i|^2) \right) \\ = -\frac{a_\star}{M} \sum_{\Gamma_{ij}} \left(\alpha_{ij} |r_i - r_j|^2 + \frac{\kappa}{\alpha_{ij}} \left| ((\alpha \mathbf{u})_i - (\alpha \mathbf{u})_j) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right|^2 \right) \leq 0. \end{aligned}$$

→ Le schéma de Godunov est stable pour $\kappa = 1$ et pour $\kappa = 0$.

Bilan intermédiaire : Le schéma de Godunov

- préserve les états incompressibles $q_h \in \mathcal{E}_\alpha^{h,\Delta}$ sur maillage triangulaire,
- nécessite une correction ($\kappa = 0$) pour préserver les états incompressibles $q_h \in \mathcal{E}_\alpha^{h,\square}$ sur maillage cartésien.

Schéma de Godunov et états bien préparés :

Définition

Un état q^0 est dit **bien préparé** si

$$\|q^0 - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L_\alpha^2} = O(M),$$

où \mathbb{P}_α est la projection orthogonale sur \mathcal{E}_α .

- Proposer une correction ($\kappa = ?$) sur maillage cartésien qui nous permette de satisfaire

$$\|q^0 - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L_\alpha^2} = O(M) \Rightarrow \forall t \leq ?, \|q(t) - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L_\alpha^2} = O(M).$$

Condition initiale :

- $a_\star = 1$.
- $M = 10^{-4}$.
- $q^0 = q_1^0 + \mathbf{M}q_2^0$ avec

$$\begin{cases} r_1^0(x, y) = 1, \\ (\alpha \mathbf{u}_1)^0 = \nabla \times \psi, \end{cases} \Rightarrow q_1^0 \in \mathcal{E}_\alpha$$

et

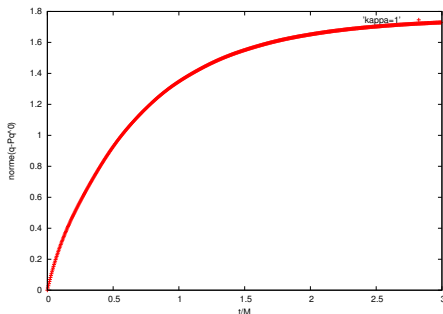
$$\begin{cases} r_2^0(x, y) = 0, \\ (\alpha \mathbf{u}_2)^0 = \nabla \phi, \end{cases} \Rightarrow q_2^0 \in \mathcal{E}_\alpha^\perp$$

donc

$$\|q^0 - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L_\alpha^2} = \|Mq_2^0\|_{L_\alpha^2} = O(M).$$

- Nous allons tracer $\|q - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L_\alpha^2}(t)$ en fonction du temps.

Maillage cartésien avec $\Delta x = \Delta y = 0.02$, $M = 10^{-4}$ et $\kappa = 1$:



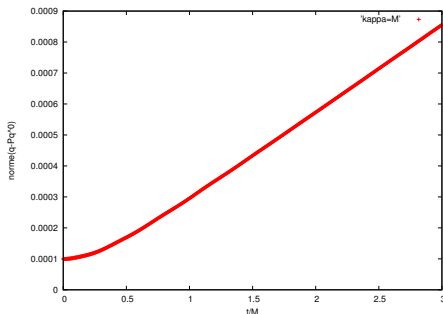
Théorème ($\kappa = 1$)

$$\forall C_1 > 0, \exists C_2(C_1) > 0, \exists C_3(C_1) > 0, \|q^0 - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L^2_\alpha} = C_1 M$$

$$\Rightarrow \forall t \geq C_2 M, \|q - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L^2_\alpha}(t) \geq C_3 \min(\Delta x, \Delta y),$$

pour tout $M \leq \frac{C_3}{C_1} \min(\Delta x, \Delta y)$.

Maillage cartésien avec $\Delta x = \Delta y = 0.02$, $M = 10^{-4}$ et $\kappa = M$:



Théorème ($\kappa = M$)

$$\forall C_1, C_2 > 0, \exists C_3(C_1, C_2) > 0, \|q^0 - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L^2_\alpha} = C_1 M$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0; C_2 M], \|q - \mathbb{P}_\alpha q^0\|_{L^2_\alpha}(t) \leq C_3 M,$$

où C_3 ne dépend pas de M .

Conclusions et perspectives

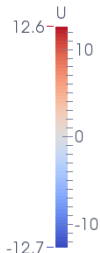
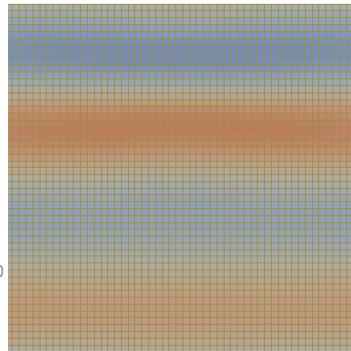
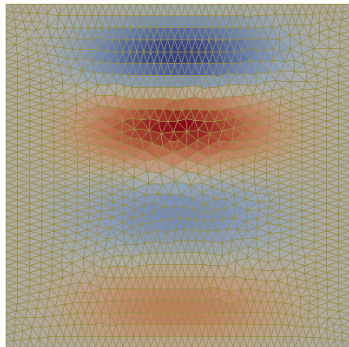
Conclusions : Nous avons

- constaté le bon comportement du schéma de Godunov sur maillage triangulaire à faible nombre de Mach,
- constaté le mauvais comportement du schéma de Godunov sur maillage cartésien à faible nombre de Mach,
- proposé une correction sur maillage cartésien.

Perspectives :

- Étendre les preuves liées au comportement du schéma de Godunov vis-à-vis des états bien préparés au niveau discret.
- Faire évoluer α en fonction du temps.
- Tester la méthode dans le cas non linéaire.

Merci de votre attention !!





S. Dellacherie, P. Omnes. On the Godunov scheme applied to the variable cross-section linear equation. FVCA6, (4) :313–321, 2011.